Физика

– наука об элементарных процессах в природе.

Механика.

– наука о движении тел.

Основные абстракции механики:

1) материальная точка – тело, размерами кот. можно пренебре

2) абс. твердое тело – система матер. точек, расстояние между любой парой которых всегда остается неизменным.

3) сплошная среда – среда, дискретностью которой можно пренебречь (воздух, вода и т.п.)

§1. Кинематика материальной точки.

Кинематика – раздел механики, где изучается движение без рассмотрения его причин.

Механическое движение – перемещение одного тела относительно другого.

Тело отсчета – тело, относительно которого рассматривают движение

Относительность - различие движений одного и того же тела относительно разных тел отсчёта.

Траектория - линия, по которой движется материальная точка

Путь - длина траектории

Задача кинематики: математически точно описать движение точки.

Кинематическое движение.

1) Измерение расстояния: чтобы измерить расстояние нужно сравнить его с длиной некоторого тела, принятого за эталон.

x метр [м]

Современное определение метра: метр - расстояние, которое проходит свет в вакууме приблизительно за $\frac{1}{300\,000\,000}$ (с) долю секунды
$(3 \cdot 10^8)$

2) Измерение промежутков времени: чтобы измерить промежуток времени, нужно сравнить его с продолжительностью некоторого процесса, взятого за эталон

секунда

Совр. опр.: секунда - это продолжительность $\approx 10^{10}$ колебаний электрона в атоме цезия.

Закон движения по прямой:

$x = x(t)$, t - время (с)

Движение точки на плоскости:

Декартова система координат - пара взаимно перпендикулярных осей, имеющих общее начало.

$x = x(t)$

$y = y(t)$

Движение точки в пространстве

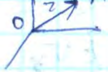
$x = x(t)$

$y = y(t)$

$z = z(t)$

Система отсчёта - система координат + часы

Радиус-вектор $\vec{r}$ точки - вектор, проведённый от начала отсчёта к данной материальной точке.



$\vec{r} = \vec{r}(t)$ - закон движения.

Орты $\vec i, \vec j, \vec k$ — единичные вектора осей координат,

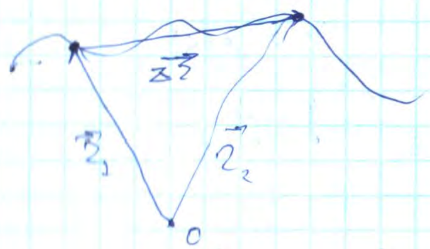
$|\vec i| = |\vec j| = |\vec k| = 1$.

$\vec r = \vec i x + \vec j y + \vec k z$.

Модуль радиус-вектора $|\vec r| \equiv r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ [м]

Перемещение — разность радиус-векторов точки, взятых в 2 разных момента времени.

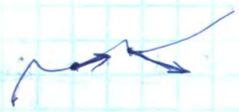
$\Delta \vec r = \vec r_2 - \vec r_1$, т.к. $\vec r_1 = \vec r_1(t)$, $\vec r_2 = \vec r_2(t)$



Длительность перемещения $\Delta t = t_2 - t_1$ [с]

Скорость — предел отношения перемещения к его длительности, когда длительность стремится к 0.

$$\vec v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec r}{\Delta t}$$



Скорость всегда напр. по кас. к траектории.

Декартовы компоненты скорости:

v_x, v_y, v_z (1) $\vec v = \vec i v_x + \vec j v_y + \vec k v_z$ [м/с]

$$\vec v = \frac{d\vec r}{dt} \equiv \dot{\vec r}$$

$$\vec r = \vec i x + \vec j y + \vec k z$$

(2) $\vec v = \vec i \frac{dx}{dt} + \vec j \frac{dy}{dt} + \vec k \frac{dz}{dt}$

Из (1) и (2) $\Rightarrow$ $v_x = \frac{dx}{dt} = \dot x$, $v_y = \frac{dy}{dt} = \dot y$, $v_z = \frac{dz}{dt} = \dot z$.

$$|\vec v| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Ускорение материальной точки — предел отношения приращения скорости к промежутку времени, когда промежуток времени стремится к 0

$$\vec a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec v}{\Delta t} = \frac{d\vec v}{dt} = \dot{\vec v} = \ddot{\vec r}$$

$\Delta \vec v = \vec v_2 - \vec v_1$

$\vec v_2 = \vec v_2(t)$, $\vec v_1 = \vec v_1(t)$, $\Delta t = t_2 - t_1$.

Декартовы компоненты ускорения.

a_x, a_y, a_z

$\vec a = \vec i a_x + \vec j a_y + \vec k a_z$

$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec i v_x + \vec j v_y + \vec k v_z) = \vec i \dot v_x + \vec j \dot v_y + \vec k \dot v_z$

$a_x = \dot v_x = \ddot x$ [м/с²]

$a_y = \dot v_y = \ddot y$ модуль ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

$a_z = \dot v_z = \ddot z$

Пример: прямолинейное равноускоренное движение

$x = x(t)$ $a_x = const$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{x_0} + a_x t \\ x(t) = x_0 + v_{x_0} t + \frac{a_x t^2}{2} \end{cases}$$

Пример: $v_{x_0} = 0, x_0 = 0$.

$$x(t) = \frac{a_x t^2}{2} \Rightarrow a_x = \frac{2x}{t^2}$$

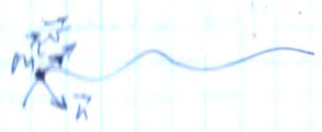
Свободное падение

[illegible] $a = g = 9{,}8$ м/с^2

Криволинейное движение

Тангенсальное и нормальное — так называют проекции ускорения на естественные оси координат.

Естественные оси — оси, одна из которых $\parallel$ вектору скорости точки, а другая $\perp$ скорости и направлена к центру кривизны траектории данной точки.



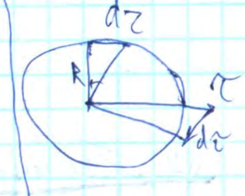
$$\vec a = \vec\tau a_\tau + \vec n a_n$$

$$\vec\tau = \frac{\vec v}{v} \Rightarrow \vec v = \vec\tau |\vec v|.$$

$$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec\tau v) = \vec\tau \cdot \dot v + \dot{\vec\tau} \cdot v$$

$$\dot{\vec\tau} = \frac{d\vec\tau}{dt}$$

$$d\vec\tau = \vec n\, d\tau$$



$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{dz}{R}$$

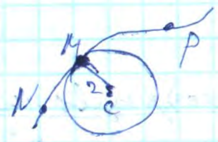
$$d\tau = \tau \frac{dz}{R}; \quad d\tau = \frac{dz}{R} \qquad d\vec\tau = \vec n \frac{dz}{R}$$

$$\dot{\vec\tau} = n \frac{1}{R} \underbrace{\frac{dz}{dt}}_{=v} = \vec n \frac{v}{R}$$

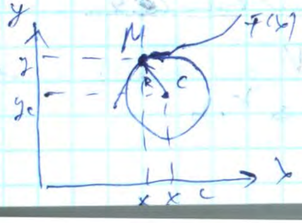
$$\vec a = \vec\tau \dot v + \vec n \frac{v^2}{R}$$

$$\boxed{a_\tau = \dot v, \quad a_n = v^2/R}$$

Круг кривизны — круг, проходящий через данную точку M на кривой и 2 другие точки на кривой N и P в пределе, когда $N \to M$ и $P \to M$.



Пример:



$y(x)$ $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = z^2$

$y(x) = f(x)$, $y'(x) = f'(x)$

$$R = \frac{(1+(y')^2)^{3/2}}{|y''|}$$

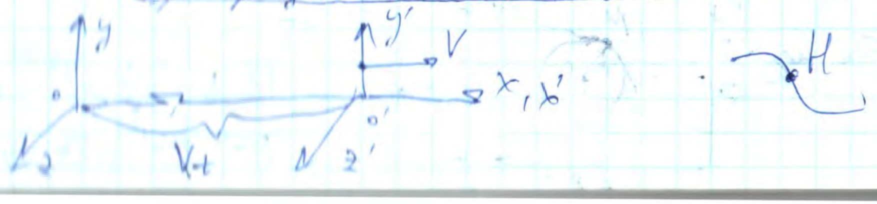
§2 Принцип относительности.

Преобразование Галилея. Преобразование Лоренца.

Принцип отн. Галилея: никакими механическими опытами, проведенными внутри данной системы отсчёта нельзя установить неподвижна ли эта сис-ма в сост. покоя или равномерно прямолинейно движется.

Уравнения выражающие физич. законы должны быть инвариантны отн. преобразования, отвечающего переход от неподвижной сис-мы отсчёта к сис-ме движущейся прямолинейно и равномерно.

Преобразования Галилея.



$$x = x' + Vt; \quad y = y'; \quad z = z'$$

Правило сложения скоростей Галилея

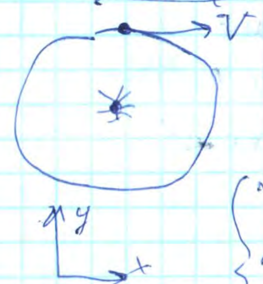
$$v_x = v_x' + V; \quad v_y = v_y'; \quad v_z = v_z'.$$

$$\vec{v}_{абс.} = \vec{v}_{отн.} + \vec{V}_{с.отн.}$$

Оказалось, что ур-е электромагнитного поля не инвариантны отн. преобраз. Галилея.

Решили проверить правило сложения скоростей Галилея для световых волн.

Опыт Майкельсона (1887 г.)



$V = 3 \cdot 10^4$ м/с

$C = 3 \cdot 10^8$ м/с

$$\begin{cases} v_x^2 + v_y^2 = c^2 \\ v_x = v_x' + V \\ v_y = v_y' \end{cases}$$

Продольная скорость света v_x': $v_y = 0$;

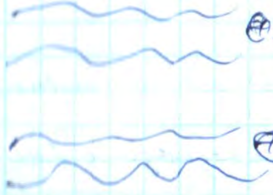
$v_x' = -V \pm C$, $|v_x'| = C \pm V$.

Поперечная скорость света v_y': $v_x' = 0$;

$v_y' = \pm\sqrt{c^2 - V^2}$; $|v_y'| = \sqrt{c^2 - V^2}$.

Интерференция света — взаимная компенсация действия 2-х световых волн в некоторых точках пространства.

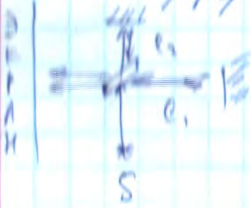
Свет + свет = темнота.



⊕ => свет

⊖ => темнота

Интерферометр Майкельсона.



1) $\xrightarrow{V}$ $l_1 \rightarrow$

Свет на экране

$$\frac{l_1}{c-V}+\frac{l_1}{c+V}=\frac{2l_2}{\sqrt{c^2-V^2}}$$

2) $\xrightarrow{V}$ $l_2 \rightarrow$

Темнота на экране

$$\frac{l_2}{c-V}+\frac{l_2}{c+V}=\frac{2}{\sqrt{c^2-V^2}}+\frac{T}{2};$$

$T=\frac{\lambda}{c}$, λ - длина световой волны.

$l_1=l_2=10$ м.

В опыте небыло изменения интерференционной картины и Майкельсон сделал вывод, что гипотеза неподвижного эфира явл-ся ошибочной.

Принцип постоянства скорости света:

скорость света не зависит от того по отношению к какой системе отсчёта (покоящейся или движущейся) эта определяется.

$v_{абс}=v_{отн.}=c$.

Эйнштейн предложил этот принцип как исходный пункт новой теории — теории относительности.

Осн. идея — движение влияет на время (относительность времени).

$$\begin{cases} x=ct \\ x'=ct' \end{cases} \text{ т.к. } x\neq x' \Rightarrow t\neq t' \ (!)$$

Преобразование Лоренца

$x,y,z,t \rightleftarrows x',y',z',t'$.

Используем преобразование

$x=x'+Vt'$, $y=y'$, $z=z'$; $t=t'+x'V/c^2$

Обратное преобр.: $\begin{cases} x'=x-Vt \\ t'=t-xV/c^2 \end{cases}$ не вот.

Преобр. Лоренца: $x = \frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$; $y' = y$, $z = z'$;

$t = \frac{t' + x'V/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$

Обратные: $x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$ $\quad t' = \frac{t - xV/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$

Принцип относительности Эйнштейна.

Ур-я, выраж. физич. законы должны быть инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Ур-е электромагнитного поля удовл. этому принципу.

§3. Кинематика твердого тела.

1) Поступательное движение тела — движение, при котором ~~положение~~ ориентация тела в пр-ве остается неизменной. При этом скорости всех точек тела одинаковы,

$\vec{v}_i = \vec{v}$.

2) Вращение вокруг неподвижной оси — движение, при кот. все точки тела движ. по окружностям, а центры всех окружностей лежат на 1-ой прямой наз. осью вращения (прямой линии, на кот. лежат неподвижные точки тела).

Угол поворота φ

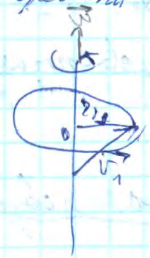
$\varphi = \varphi(t)$ — закон движения

$\varphi = \frac{S}{R}$ — угол в радианах.

$S = R\varphi$

Угловая скорость вращения тела — производная угла поворота тела по времени

$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$ $\left(\frac{рад}{с}\right)$.

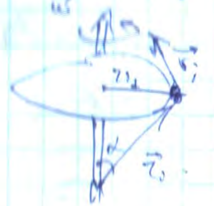


$dt \to dS_i = r_i\, d\varphi$

$v_i = \frac{dS}{dt} = r_i\, \omega$

$v_i = \omega\, r_i$

Вектор угловой скорости – вектор напр. вдоль оси вращ. тела по правилу правого винта, модуль вект. = угловой скорости.



$$\vec{v}_i = [\vec{\omega}_i, \vec{r}_i]$$

векторное произведение.

$$v_i = \omega \underbrace{r_i \sin\alpha}_{r_{i\perp}} = \omega r_{i\perp}.$$

3) Движение тела с одной неподвижной точкой

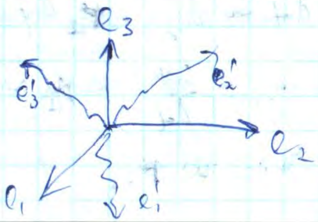
Т. Эйлера: движение тела с одной закреплённой точкой в каждый момент времени можно рассматривать как вращение вокруг некоторой оси, проходящей через точку закрепления.

$$\vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_i].$$

$\vec{\omega}$ – мгновенная угловая скорость вращения

$\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$.

Матрица поворота тела – матрица, переменными которой являются скалярные

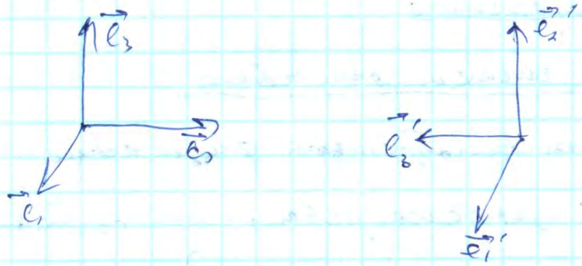


$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – орты лаб. сис-мы,
$\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$ – системы тела

произведения ортов этих 2-х сис-м. координат.

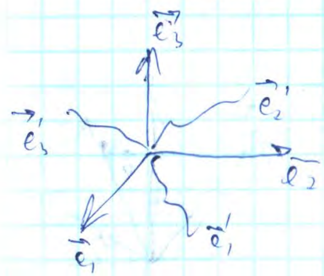
$$S_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j{}', \quad i, j = 1, 2, \ldots$$

$$S = \begin{pmatrix} \vec{e}_1\vec{e}_1{}' & \vec{e}_1\vec{e}_2{}' & \vec{e}_1\vec{e}_3{}' \\ \vec{e}_2\vec{e}_1{}' & \vec{e}_2\vec{e}_2{}' & \vec{e}_2\vec{e}_3{}' \\ \vec{e}_3\vec{e}_1{}' & \vec{e}_3\vec{e}_2{}' & \vec{e}_3\vec{e}_3{}' \end{pmatrix}$$



$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Преобразование компонент при повороте сис-мы отсчёта.



$$\vec{r} = \vec{e}_1 x_1 + \vec{e}_2 x_2 + \vec{e}_3 x_3 = \vec{e}_1{}' x_1' + \vec{e}_2{}' x_2' + \vec{e}_3{}' x_3'$$

$x_1 = \vec e_1 \vec e_1' x_1' + \vec e_1 \vec e_2' x_2' + \vec e_1 \vec e_3' x_3' = S_{11} x_1' + S_{12} x_2' + S_{13} x_3'$.

$x_i = \sum_j S_{ij} x_j'$

$\hat A \hat B \ne \hat B \hat A$

§4. Кинематика

Вращающаяся система отсчёта.

Какие особенности приобретают физические явления, если их рассматривать относительно вращающейся системы отсчёта?

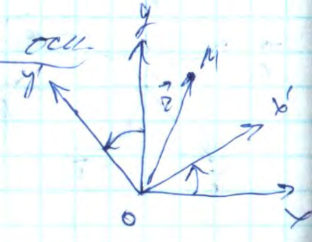
Цель — найти связь между кинематическими хар-ками движения точки отн. неподвижной и вращающейся систем.

S — неподвижная сис-ма отсчёта

S' — вращающаяся с.о.

1) Вращение вокруг неподвижной оси.

радиус-вектор $\vec r = \vec r'$.



$d\vec r = d\vec r'$ — перемещение отн. S

Пусть $d'\vec r'$ — перемещ. отн. S'

Пусть $d'\vec r' = 0$ (неподв. отн. S')

§3 → $\vec v = [\vec\omega, \vec r]$; $\vec\omega$ — угловая скорость вращения сис-мы S'

$$d\vec r = \vec v\, dt = [\vec\omega, \vec r]\, dt$$

Если $d'\vec r' \ne 0$ (подв. отн. S')

$$d\vec r = d'\vec r + [\vec\omega, \vec r]\, dt$$

$d\vec r' = d'\vec r' + [\vec\omega, \vec r']\, dt$ — приращение вектора отн. неподвижной сис-мы = изменению этого вектора отн. подвижной + изменение засчёт вращения сис-мы отсчёта.

Аналогично $d\vec v' = d'\vec v' + [\vec\omega, \vec v']\, dt$

$$d\vec A' = d'\vec A' + [\vec\omega, \vec A]\, dt$$

$\vec A' = \vec r', \vec v', \dots$

Скорость. $\vec v = \dfrac{d\vec r}{dt} = \dfrac{d'\vec r'}{dt} + [\vec\omega, \vec r']$

$\vec v' = \dfrac{d'\vec r'}{dt}$ — скор. отн. S'

$$\vec v = \vec v' + [\vec\omega, \vec r']$$

Ускорение. $d\vec v = d\vec v' + [\vec\omega, d\vec r']$ (считаем $\vec\omega$ - const).

$\{ d\vec r = d'\vec r' + [\vec\omega, \vec r']$

$d\vec v' = d'\vec v' + [\vec\omega, \vec v']$

$d\vec v = d'\vec v' + [\vec\omega, \vec v']\,dt + [\vec\omega, d'\vec r'] +$

$+ [\vec\omega, [\vec\omega, \vec r']]\,dt$

$\vec a = \frac{d\vec v}{dt}; \quad \vec a = \frac{d'\vec v'}{dt} + [\vec\omega, \vec v'] + [\vec\omega, \frac{d'\vec r}{dt}] +$

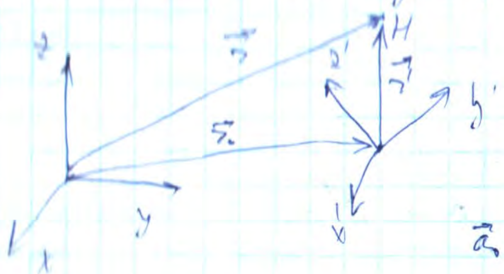
$+ [\vec\omega, [\vec\omega, \vec r']]$.

Обозначим $\vec a' = \frac{d'\vec v'}{dt}$

$\vec a = \vec a' + 2[\vec\omega, \vec v'] + [\vec\omega, [\vec\omega, \vec r']]$

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec r = \vec r' \\ &\vec v = \vec v' + [\vec\omega, \vec r'] \\ &\vec a = \vec a' + 2[\vec\omega, \vec v'] + [\vec\omega, [\vec\omega, \vec r']] \end{aligned}}$$

c) Вращение вокруг движущейся оси.



$\vec\omega = const$

$\vec r = \vec r_0 + \vec r'$

$\vec v_0 = \frac{d\vec r_0}{dt}$,

$\vec a_0 = \frac{d\vec v_0}{dt}$

$\begin{cases} \vec r = \vec r_0 + \vec r' \\ \vec v = \vec v_0 + \vec v' + [\vec\omega, \vec r'] \cancel{dt} \end{cases}$

$\vec a = \vec a_0 + \vec a' + 2[\vec\omega, \vec v'] + [\vec\omega, [\vec\omega, \vec r']]$

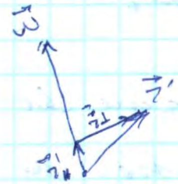
Переносное и кориолисово ускорение

$a_п = \vec a_0 + [\vec\omega, [\vec\omega, \vec r']]$ — переносное

$a_к = 2[\vec\omega, \vec v']$ — кориолисово.

$\vec a = \vec a' + \vec a_п + \vec a_к$.

Центростремительное ускорение.



$\vec r' = \vec r'_\parallel + \vec r'_\perp$

$[\vec\omega, \vec r'] = \underbrace{[\vec\omega, \vec r'_\parallel]}_{=0} + [\vec\omega, \vec r'_\perp]$

$[\vec\omega, [\vec\omega, \vec r']] = [\vec\omega, [\vec\omega, \vec r'_\perp]] =$

$= \vec\omega \underbrace{(\vec\omega, \vec r'_\perp)}_{=0} - \vec r'_\perp \omega^2 = -\omega^2 \vec r'_\perp$

$\vec a_{цс} = -\omega \vec r'_\perp$ — центростремительное ускорение.

§5 Законы Ньютона.

I з-н: $\exists$ сис-мы отсчёта, относительно которых всякое тело, бесконечно удалённое от других тел не испытывает ускорение. Такие сис-мы наз. инерциальными.

II з-н: Произведение $m \cdot \vec a$ равно (равнод. получ.) действующей на неё силы.

$\vec{F} = m\vec{a}$

III з. Н: Действия двух тел друг на друга равны и противоположно направлены.

$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$

Законы Ньютона – обобщение опытных данных (опыты Галилея, Гюйгенса, законы Кеплера).

1) Как показывает опыт, сис-ма отсчёта, связанная с Землёй явл-ся инерциальной, по крайней мере приближенно.

2) Массой наз-ся мера отклика тела на действие силы.

Сила – мера действия на данное тело других тел.

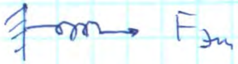
Как измерить силу и массу?

Введем ед. массы, которая в систем СИ наз-ся 1 килограмм – масса эталонного тела, представляющего собой цилиндр из сплава платины и иридия диаметром 39 мм и такой же высоты.

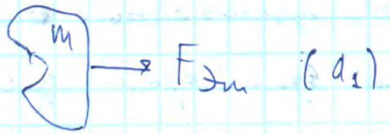
$m_{эт} = 1 кг.$

Введем ед. изм. силы 1 Н – это сила, которая вызывает ускорение 1 м/с² у тела массой в 1 кг.

$F_{эт} = 1 Н = 1 кг \cdot 1 м/с^2$



Измерение массы: подействуем на тело силой в 1 Н и измерим ускорение.



$m = \frac{F_{эт}}{a_1}$

Пример: $a_1 = 2 м/с^2$,

$m = \frac{1 Н}{2 м/с^2} = 0,5 кг.$

Измерение силы: подействуем на тело массой 1 кг и измерим ускорение.

$F = m_{эт} a_2$

Пример: $a_2 = 3 м/с^2$

$F = 1 кг \cdot 3 м/с^2 = 3 Н$

$m\vec{a} = \vec{F}$ – применимо к любым силам ие к массам, а не только к эталонам.

Пример: $a = \frac{F}{m} = \frac{3Н}{0{,}5кг} = 6\ м/с^2$

Ограничение II з-на Ньютона: перестает работать при очень больших скоростях, а именно при $v \to c$;

2) не действует для очень маленьких тел, т.к. электроны в атомах;

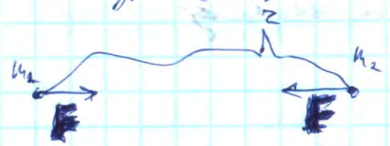
3) Силы взаимодействия, приложенные к разным телам, направлены вдоль одной прямой и имеют одинаковую природу.

§6. Силы в механике.

Силы в природе: гравитационные, электромагнитные, сильные $(\le 10^{-15}\ м)$ и слабые $(\le 10^{-15}\ м)$.

$n \to p + e + \tilde{\nu}$ (β-распад)

Закон всемирного тяготения: ∀ две материальные точки притягивают друг друга с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональ-ной квадрату расстояния между ними.



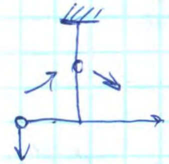
$F \sim \frac{m_1 m_2}{r^2}$;

G – гравитационная постоянная

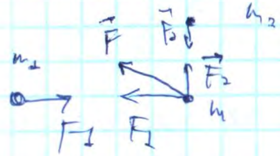
$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$

Опыт: $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{Н\cdot м^2}{кг^2}$

Опыт Кавендиша (1785 г.)

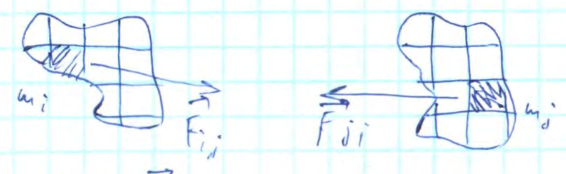


Принцип суперпозиции: каждая пара тел взаимодействует независимо.



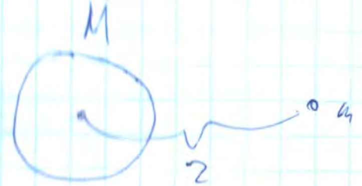
$\vec F = \vec F_1 + \vec F_2$.

$F = \sum_i F_i$.



$\vec F = \sum_i \sum_j \vec F_{ij}$

Притяжение точки к шару



$$F = G\frac{Mm}{r^2}.$$

Взвешивание Земли.

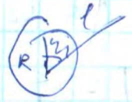
$$F = G\frac{Mm}{R^2} = mg$$

$$M = \frac{R^2 g}{G}.$$

$g = 9,8$ м/с²; $R = 6400$ км; $G = 6,67\cdot10^{-11}\ \frac{Н\cdot м^2}{кг^2}$

Имеем $M = 6\cdot10^{24}$ кг.

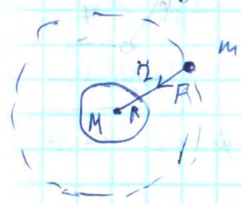
$S = R\varphi$



Факты, подтверждающие закон всемирного тяготения:

1) ускорение свободного падения одинаково для всех тел вблизи поверхности Земли;

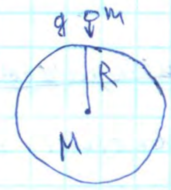
2) период обращения Луны;



$$ma = F$$

$$a = \frac{v^2}{r}$$

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$



$$mg = F = G\frac{Mm}{R^2}$$

$$g = G\frac{M}{R^2}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v};$$

$$v^2 = G\frac{M}{r}; \quad v = \sqrt{G\frac{M}{r}};$$

$$T = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{GM}} = 2\pi r\sqrt{\frac{r}{gR^2}};$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi r}{R}\sqrt{r/g}}$$

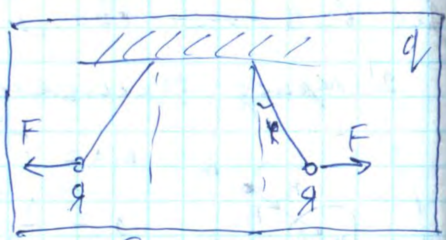
$r = 384000$ км
$R = 6400$ км
$g = 9,8$ м/с².

$T \approx 30$ суток

Электромагнитные силы.

I. Электрическая (сила Кулона)

Электрический заряд – мера электрического взаимодействия тел



Электрическое поле – поле, создаваемое электрическими зарядами и проявляющее себя действием на электрический заряд.

Напряженность электр. поля – мера действия поля на заряд.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}; \Rightarrow \vec{F} = q\vec{E}$$

II. Магнитная сила (Лоренца).

$$\vec{F} = q[\vec{v}, \vec{B}]$$

$\vec{B}$ – магнитная индукция

Полная сила

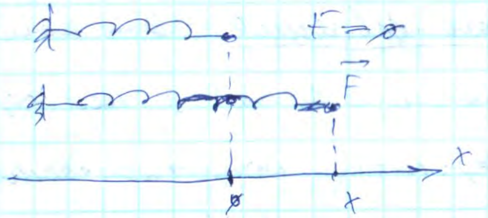
$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{v}, \vec{B}]$$ – сила Лоренца.

Сила упругости.

– сила, препятствующая деформации упругих тел.

Упругое – тело, стремящееся восстановить свою форму после прекращения действия сил.

Закон Гука.



Опыт: $F_x = -kx$.

$k = const$ – коэфф. упругости

$[k] = \frac{Н}{м}$;

Сила трения.

I. Сила сухого трения

Сила трения – сила, препятствующая относительному перемещению соприкасающихся тел.

II. Трение покоя – трение в отсутствии перемещения соприкасающихся тел.

$\vec F + \vec F_{тр} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec F_{тр} = -\vec F}$

Как показывают опыт, сила трения покоя ограничена некоторым макс. значением: $F_{тр} \le F_{max}$

Сила нормального давления – это составляющая силы взаимодействия тел перпендикулярная поверхности соприкосновения.

Опыт показывает: $F_{max} = \mu N$

$\mu = const$ – коэфф. трения [1]

R – сила реакции

Сила трения – сост. силы реакции $\parallel$ поверхности.

III. Трение скольжения – трение при наличии относительного перемещения соприкасающихся тел.

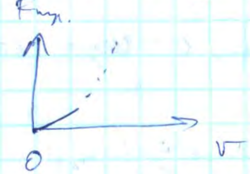
Опыт показывает $F_g = \mu N$.

IV. Вязкое трение – трение, препятствующее движению тела в сплошной среде.

1) для вязкого трения нет трения покоя;

2) она зависит от скорости.

Опыт показывает, что $F_{тр} \sim v$, если v мал



$\vec F_{тр.} = \alpha \vec v$.

Если на материальную точку действует сразу 2 силы, то она начинает двигаться так, как если бы действовала 1 сила равная векторной сумме двух сил

$\vec F = \vec F_1 + \vec F_2$

$\vec F = \sum_i \vec F_i$

Импульс материальной точки – это произведение массы материальной точки на её скорость.

$\vec p = m\vec v$ $\left[\frac{кг \cdot м}{с}\right]$

Релятивистское уравнение движения

– ур-е движения тел с очень большими скоростями, соизмеримыми с v света.

$\dot{\vec p} = \vec F$, $\vec p = \frac{m\vec v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ — релятивистский импульс

m — масса тела, v — скорость, c — скор. света.

$\vec F = q\vec E + q[\vec v, \vec B]$ — сила Лоренца

§ 7. Неинерциальные системы отсчёта. Силы инерции.

Неинерциальной явл-ся сис-ма, кот. движ. ускоренно отн. поверхности земли.

Выведем ур-е движения тела в неинерциальной системе.

S — инерциальная с.о.

S' — неинерциальная с.о.

$m\vec a = \vec F$ (S)

$m\vec a + m\vec a' - m\vec a' = \vec F \Rightarrow$

$\Rightarrow m\vec a' = \vec F + \vec F_{ин}$, где (*) $\vec F_{ин} = -m(\vec a - \vec a')$ —

— сила инерции — добавочная сила, действующая на матер. точку в неинерц. сис-ме отсчёта и определяемая формулой (*); где m — масса м.т.; $\vec a$ — ускорение отн. ИСО; $\vec a'$ — ускорение отн. НИСО.

§4 → $\vec a = \vec a' + \vec a_{пер} + \vec a_{кор}$,

$\vec a_п = \vec a_0 - \omega^2 \vec r_\perp'$ — переносное ускорение,

$\vec a_к = 2[\vec\omega, \vec v']$ — кориолисово ускорение.

Подставим в $\vec a$ (*):

$\vec F_{ин} = \vec F_п + \vec F_к$,

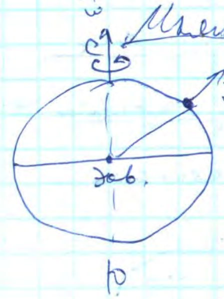
$$\begin{cases} \vec F_п = -m\vec a_0 + m\omega^2 \vec r_\perp' & \text{— переносная сила инерции} \\ \vec F_к = -2m[\vec\omega, \vec v'] & \text{— Кориолисова с. ин.} \end{cases}$$

Центробежная сила инерции: $\vec F_{ц.б.} = m\omega^2 \vec r_\perp'$

Невесомость — исчезновение веса тела, вызванное неинерциальностью системы отсчёта.

Перегрузка — возрастание веса тела, вызванное неинерциальностью с.о.

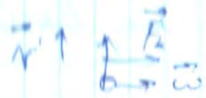
Маятник Фуко



$\vec F_к = -2m[\vec\omega, \vec v'] =$

$= -2m[\vec\omega_\perp, \vec v']$

в гор. плоскости:



вид движ. сверху.

...09

Свойства сил инерции.

① Эти силы отличны от нуля только для наблюдателя связанного с неинерциальной системой отсчёта.

② Нельзя указать тело, со стороны которого приложена сила инерции.

Силы инерции не подчиняются III-му закону Ньютона.

§8. Импульс системы частиц. Движение центра масс

Импульс материальной точки — произв. массы точки на её скорость.

$\vec p = m\vec v$ $[кг \cdot \frac{м}{с}]$

$\dot{\vec p} = m\dot{\vec v} = m\vec a = \vec F \Rightarrow \boxed{\dot{\vec p} = \vec F}$

Скорость изм. импульса материальной точки равна действующей на неё силе.

Импульс системы — сумма импульсов отдельных частиц системы.

$\vec P = \sum_i \vec p_i = \sum_i m_i \vec v_i$

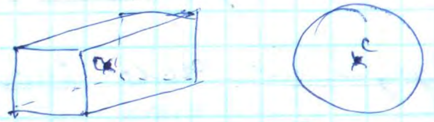
Центр масс системы частиц — точка, радиус-вектор которой опр-ся формулой

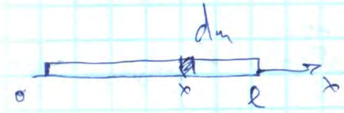
$\vec r_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec r_i$,

$m = \sum_i m_i$ — полная масса системы.

Пример.

$\vec r_c = \frac{m\vec r_1 + m\vec r_2}{2m} = \frac{\vec r_1 + \vec r_2}{2}$





$x_c = \frac{1}{m} \sum_i m_i x_i$ $\quad dm = \frac{dx}{l} m$

$x_c = \frac{1}{m} \int x\, dm$

$x_c = \frac{1}{l} \int_0^l x\, dx = \frac{l^2}{2l} = \frac{l}{2}$.

$\vec r_c = \frac{1}{m}\int\limits_V \vec r \rho \, dV$, $\rho = \frac{m}{V}$ — плотность

Скорость и ускорение центра масс.

$\vec v_c = \dot{\vec r}_c = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec v_i$.

$\vec a_c = \dot{\vec v}_c = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec a_i$.

Импульс системы: $\vec p = \sum_i m_i \vec v_i = m\vec v_c$

$\boxed{\vec p = m\vec v_c}$, т.е.

Импульс произвольной сис-мы равен произведению массы сис-мы на вектор скорости центра масс.

Закон движения центра масс.

Внутренние силы системы частиц — силы взаимодействия между частицами системы.

$\vec F_{ij} = -\vec F_{ji}$ — внутренние силы

Сумма для $\forall$ 2-х частиц внутренних сил равна 0 ($\vec F_{ij} + \vec F_{ji} = 0$) по III з-ну Ньютона.

$\Rightarrow$ Σ внутренних сил $= 0$ и для всей системы в целом: $\sum_i \sum_j \vec F_{ij} = 0$.

Внешние силы — силы, действующие на тела сис-мы со стороны тел, не входящих в данную сис-му — $\vec F_i$.

$m_i \vec a_i = \vec F_i + \sum_j \vec F_{ij} \quad \Big| \sum_i$

$\sum_i m_i \vec a_i = \sum_i \vec F_i + \underbrace{\sum_i \sum_j \vec F_{ij}}_{0}$.

$\boxed{m\vec a_c = \vec F_{вн.}}$, т.е.

Центр масс сис-мы частиц движется так, как если бы в этой точке находилась вся масса сис-мы и к ней были бы приложены все внешние силы.

§9. Закон сохранения импульса.

Закон изменения импульса сис-мы.

Импульс сис-мы $\vec p = \sum_i m_i \vec v_i$

$\dot{\vec p} = \sum_i m_i \dot{\vec v}_i = \sum_i m_i \vec a_i = m\cdot \vec a_c = \vec F_{вн.}$

$\boxed{\dot{\vec p} = \vec F_{вн}}$, т.е.

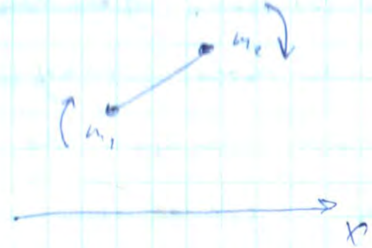
Скорость изм. импульса системы равна сумме внешних сил.

Если сумма внешних сил $= 0$, то импульс механической системы сохраняется.

Если $\vec F_{вн.} = 0$, то $\vec p = \sum_i m_i \vec v_i = const$.

Если $\exists$ такая ось в проекции на которую $\sum_i \vec F_{вн_i} = 0$, то в направлении этой оси импульс сис-мы сохраняется.

Если $\vec F^{(x)}_{вн.} = 0$, то $p_x = \sum_i m_i v_{ix} = const$.



$p_x = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = const$.

Реактивное движение.

$m\vec v = (m - dm)(\vec v + d\vec v) + \vec u\, dm$

Скорость воды.

$\vec u = \vec v + \vec c$, $\vec c$ — скор. воды отн. ракеты.

$\cancel{m\vec v} = \cancel{m\vec v} + m\,d\vec v - \cancel{\vec v\, dm} - dm\, d\vec v + \cancel{\vec v\, dm} + \vec c\, dm$

$0 = m\,d\vec v - \underbrace{dm\, d\vec v}_{\to 0} + \vec c\, dm$;

$m\,d\vec v = -\vec c\, dm \;\Big|\; /dt$;

$m \frac{d\vec v}{dt} = -\vec c\, \frac{dm}{dt}$;

$m\dot{\vec v} = -\vec c\, \dot m$. $\dot m = \mu$ — скорость расхода массы $\left[\frac{кг}{с}\right]$

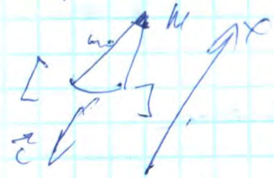
$\boxed{\vec F = -\vec c\,\mu}$ — реактивная сила.

Пример. ракета „Энергия“.

$c = 3\ \text{км}/\text{с}$, $\mu = 10\ \text{тонн}/\text{с}$

$F_p = \mu \cdot c = 10^4\ \frac{кг}{с} \cdot 3\cdot 10^3\ \frac{м}{с} = 3\cdot 10^7\ Н$

Стартовая масса ракеты



$m\frac{d\vec v}{dt} = \vec F = -\mu\vec c$

$m\frac{dv}{dt} = \mu c$.

$m = m(t) = m_0 - \mu t$

$(m_0 - \mu t)\frac{dv}{dt} = \mu c$;

$\int_0^v \frac{dv}{c} = \int_0^t \frac{\mu\, dt}{\underbrace{m_0 - \mu t}_{x}} \Rightarrow \frac{v}{c} = -\int_{m_0}^{m(t)} \frac{dx}{x}$,

$\frac{v}{c} = -\ln\frac{m}{m_0} = \ln\frac{m_0}{m}$.

$\frac{\Delta m}{m} = e^{v/c}$ → $\boxed{m_0 = m e^{v/c}}$

Пример: р. Энергия. $m = 100$ тонн, $V = 8$ км/с

$c = 2,7$ км/с

→ $m_0 = 2000$ тонн (!).

Фотонная ракета.

$$F_p = \frac{P}{c}$$

свет

Пример. $F_p = 1\,H$.

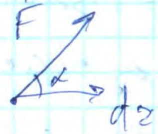
$$P = F_p c = 1\,H \cdot 3\cdot10^8\,\frac{м}{с} = 3\cdot10^8\ Вт.$$

§10. Работа и потенциальная энергия.

Элементарная работа — скалярное произведение силы на бесконечно малое перемещение точки приложения силы.

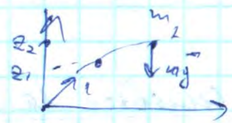
$$dA = \vec F \cdot d\vec r \qquad (1\,H\cdot м = 1\ Дж)$$

Полная работа — сумма элементарных работ. $A = \int dA$.



$$dA = \vec F \cdot d\vec r = F\,dr\cos\alpha = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Пример: работа силы тяжести.



$$dA = \vec F\,d\vec r = F_z\,dz = -mg\,dz.$$

$$A = \int dA = -mg\int_{z_1}^{z_2} dz = mg(z_1 - z_2).$$

Силовое поле — если ~~работа~~ силы, действ. на мат. точку зависит только от координат точки, но не зависит от её скорости, то сила образует силовое поле.

$\vec F = \vec F(\vec r)$ Примеры: сила тяжести, сила упругости, сила Кулона.

Не образуют силовых полей сила трения, сила Ло

Потенциальное силовое поле — если работа силы, действ. на мат. точку = 0 при перемещении точки по любому замкнутому контуру, то сила наз-ся потенциальной (силовое поле соответственно).

7. Условие потенциальности силового поля.

$$\oint \vec F d\vec r = 0.$$

Потенциальная энергия

Элементарная п. э. — работа потенциальной силы, взятая со знаком „−“.

$$d\Pi = -dA_n.$$

Потенциальная энергия — сумма эл. потенциальных энергий.

$$\Pi = \int d\Pi;$$

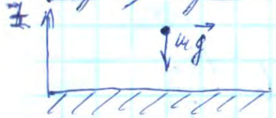
$$\Pi = -\int_{\vec r_0}^{\vec r} \vec F d\vec r = \Pi(\vec r, \vec r_0).$$

Эта функция определена только для потенциальных сил.

$\Pi(\vec r_0) = 0$, $\vec r_0$ — точка начала отсчёта п. э.

Примеры силовых полей:

① Однородное поле тяготения

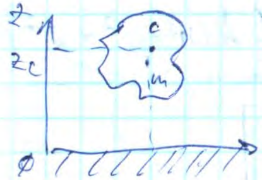


$$d\Pi = -dA_n = -\vec F d\vec r = -m\vec g\, d\vec r = mg\,dz$$

$$\Pi = \int d\Pi = mg\int_{z_0}^{z} dz = mg(z - z_0).$$

$z_0 = 0 \Rightarrow \Pi = mgz = mgh$

② Тело в поле тяготения.



Пот. энергия системы частиц — сумма п. э. отдельных частиц системы.

$$\Pi = \sum_i \Pi_i$$

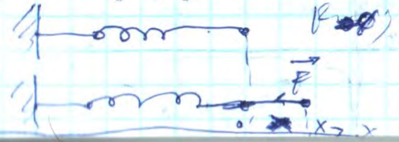
$\Pi_i = m_i g(z_i - z_0)$, $z_0 = 0$.

$\Pi = g\sum_i m_i z_i = gm z_c$; где $z_c = \frac{1}{m}\sum m_i z_i$;

$\vec r_c = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec r_i$, $m = \sum_i m_i$

Потенц. энергия такова, как если бы вся масса тела находилась бы в его центре масс.

③ Сила упругости.



$F_x = -kx$ (закон Гука)

$$d\Pi = -dA_n = -\vec F d\vec r = kx\,dx$$

$$\Pi = \int_0^x d\Pi = k\int_0^x x\,dx = \frac{kx^2}{2}$$

4) <u>Центральное силовое поле</u> – поле силы, направленной всегда в сторону одной и той же точки, называемой силовым центром.

$$\vec{F} = -F\frac{\vec{r}}{r}, \quad F = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$d\Pi = -\vec{F}d\vec{r} = F\frac{\vec{r}}{r}d\vec{r}$$

$$\vec{r}d\vec{r} = x\,dx + y\,dy + z\,dz = \frac{1}{2}d(x^2+y^2+z^2) = \frac{d(r^2)}{2} =$$

$$= r\,dr \qquad \boxed{\vec{r}d\vec{r} = r\,dr}$$

Скал. произв. ~~вектора~~ вектора на его приращение = произв. (вектора) на (приращение).

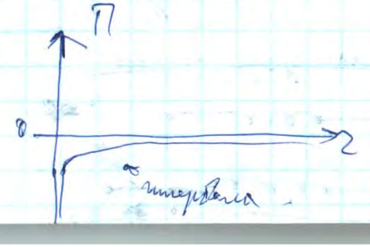
Аналогично $\vec{v}d\vec{v} = v\,dv$.

$$d\Pi = \frac{F}{r}\vec{r}d\vec{r} = \frac{F}{r}r\,dr = F\,dr = G\frac{Mm}{r^2}dr.$$

$$\Pi = \int d\Pi = GMm\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r^2} = GMm\left(-\frac{1}{r}+\frac{1}{r_0}\right).$$

Положим, что $r_0 \to \infty$

$$\boxed{\Pi(r) = -\frac{GMm}{r}}$$



<u>Выражение силы через потенциальную энергию.</u>

$\Pi(\vec{r})$ дано, $\vec{F}(\vec{r})$ – ?

$$d\Pi = -dA_n = -\vec{F}d\vec{r} = -(F_x dx + F_y dy + F_z dz) =$$

$$= \frac{\partial\Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Pi}{\partial z}dz$$

$$F_x = -\frac{\partial\Pi}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial\Pi}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial\Pi}{\partial z}$$

(Частная произв. – произв. при которой берется при фикс. знач. всех величин кроме той по к-рой дифф.)

$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z,$$

$$\vec{F} = -\operatorname{grad}\Pi$$

$$\operatorname{grad} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$ – градиент.

§11. Кинетическая энергия. Закон сохр. энергии в механике.

<u>Кинет. энергия мат. точки</u>: $K = \frac{mv^2}{2}$,

m – масса точки, v – её скорость. [Н·м = Дж]

<u>Теорема об изменении кинетической энергии.</u>

$m\frac{d\vec v}{dt} = \vec F$ $\quad| \cdot d\vec r$ скалярно.

$m\frac{d\vec r}{dt}\, d\vec v = \vec F\, d\vec r = dA$

$m\vec v\, d\vec v = dA$;

$dA = mv\, dv = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dK$

$$dK = dA$$

Приращение кинетической энергии точки равно эл. работе, действующих на неё сил.

Кинетическая энергия системы частиц

- это сумма кинетических энергий отдельных частиц системы.

$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}$

1) Поступательное движение твердого тела.

$\vec v_i = \vec v$.

$K = \frac{mv^2}{2}$, где m - масса тела.

2) Вращение тела вокруг неподвижной оси.

ω - угловая скорость

§3 → $v_i = \omega r_{i\perp}$

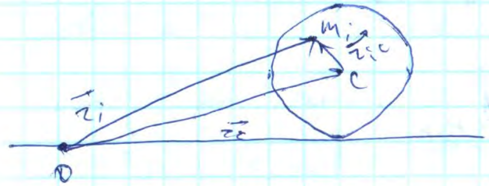
$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\omega r_{i\perp})^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i r_{i\perp}^2$

Сумма - это нек. хар-ка тела по отношению к данной оси.

$I = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$ - момент инерции тела относительно данной оси.

$$\boxed{K = \frac{I\omega^2}{2}}$$

3) Плоское движение твердого тела - движ., при котором все точки тела движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости.



$\vec r_i = \vec r_c + \vec r_{ic}$

$\vec v_i = \vec v_c + \vec v_{ic}$.

$\vec v_c = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec v_i$

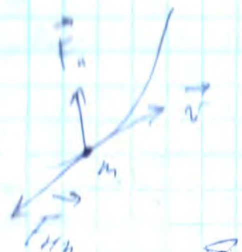
$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec v_i \cdot \vec v_i = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\vec v_c + \vec v_{ic})\cdot(\vec v_c + \vec v_{ic}) = \frac{1}{2} m v_c^2 + \vec v_c \underbrace{\sum_i m_i \vec v_{ic}}_{0} + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_{ic}^2$

$$\left(\sum_i m_i \vec{v}_{i/c} = \sum_i m_i(\vec{v}_i - \vec{v}_c) = \sum_i m_i\vec{v}_i - m\vec{v}_c = 0\right)$$

$$\boxed{K = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I \omega^2}$$ — Теорема Кёнига.

Полная механическое эн. сис-мы — это сумма кинетической и потенциальной энергии системы. $E = K + П$.

Закон изменения полной энергии:



$$dK = dA$$
$$dA = \vec F d\vec r$$
$$\vec F = \vec F_п + \vec F_{нп}$$
$$dK = dA_п + dA_{н.п}$$

$dA_п = \vec F_п d\vec r$, $dA_{н.п} = \vec F_{н.п} d\vec r$

$$dA_п = -dП$$
$$dK = -dП + dA_{н.п}$$
$$d(K+П) = dA_{н.п}$$
$$dE = dA_{н.п}$$

Приращ. полной мех. энергии точки равно эл. работе непотенциальных сил.

Также же утв. верно и для сис-мы частиц.

Закон сохр. энергии: если работа н.п. сил равна 0, то полная механическая энергия сис-мы сохраняется.

Если $A_{нп} = 0$, то $E = K + П$ сохраняется (= const)

Импульс и энергия в теории относительности.

Закон сохр. импульса: если сумма внешних сил = 0, то релятивистский импульс системы сохраняется.

Если $\vec F_{вн} = 0$, то $\vec p = \sum_i \frac{m_i \vec v_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}}$, $\vec p$ = const

Закон. сохр. энергии С.Т.О.: если сумма внешних сил равна 0, то релятивистская энергия системы сохраняется.

Если $\vec F_{вн} = 0$, то $E = \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}}$; c — v света, $E = const$.

$\vec p$ — релятив. импульс, E — релят. энергия.

З.С.Э. явл. следствием закона сохр. импульса и принципа относительности.

В т.о. эти 2 закона всегда действуют вместе.

Пример (неупругий удар)

$$\begin{cases} \dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \dfrac{M\vec{V}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \\ \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \dfrac{Mc^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \end{cases}$$

$\Rightarrow V = 0. \quad M = \dfrac{2m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ $(>2m!)$

Заключение: возм. взаимное превращение массы-энергии.

Факты, подтверждающие теорию относительности.

① Деление ядра урана.

$E = c^2 \Delta m$

$\Delta m = m - (m_1 + m_2)$ − дефект масс

② Световое давление

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$E\vec{v} = \vec{p}c^2$$

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$$

Положим $m=0$; $\Rightarrow E = pc$, $v = c$

фотон

Сила светового давления $F = \dot{p} = \dot{E}/c = P/c$,

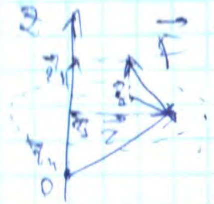
где P − мощность света.

Пусть $P = 10^3$ Вт, $c = 3\cdot10^8$ м/с

$F = \frac{10^3}{3\cdot10^8}$ Н $= 3\cdot10^{-6}$ Н.

§12. Момент импульса частицы и системы частиц. Момент силы.

Моментом импульса частицы наз-ся векторное произведение радиус-вектора частицы на её импульс.



$\vec M = [\vec r, \vec F]$

$\begin{cases} \vec r = \vec r_\parallel + \vec r_\perp \\ \vec F = \vec F_\parallel + \vec F_\perp \end{cases}$

$\vec M = [\vec r_\parallel + \vec r_\perp, \vec F_\parallel + \vec F_\perp] = \underbrace{[\vec r_\parallel, \vec F_\parallel]}_{0} + \underbrace{[\vec r_\parallel, \vec F_\perp] + [\vec r_\perp, \vec F_\parallel]}_{\vec M_\perp} + \underbrace{[\vec r_\perp, \vec F_\perp]}_{\vec M_\parallel} \Leftrightarrow \vec M_\parallel = [\vec r_\perp, \vec F_\perp]$

Аналогично $\vec N_\parallel = [\vec r_\perp, m\vec v_\perp]$ и

$\vec N_\parallel = \sum_i [\vec r_{i\perp}, m_i \vec v_{i\perp}]$ – для сис-мы.

Вращение тела вокруг неподвижной оси.

$\vec v_i = [\vec\omega, \vec r_{i\perp}]$ (§3)

$\vec v_i = \vec v_{i\perp}$

$\vec N_\parallel = \sum_i [\vec r_{i\perp}, m_i [\vec\omega, \vec r_{i\perp}]] = \sum_i m_i \{\vec\omega\, r_{i\perp}^2 - \vec r_{i\perp} \underbrace{(\vec r_{i\perp}, \vec\omega)}_{0}\} = \vec\omega \sum_i m_i r_{i\perp}^2 =$

$J\vec\omega$

– момент инерции тела отн. данной оси,

$J = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$

$\boxed{\vec N_\parallel = J\vec\omega}$

Плоское движение твердого тела

– движ. др. сост. вр. пост. движ. ∥ сис. тел.

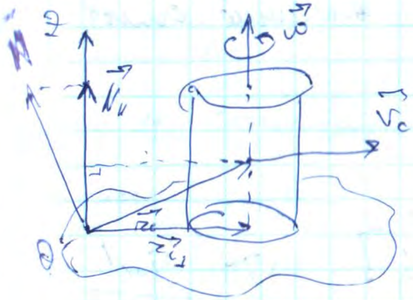
$\vec N = \vec N_c + \vec N_{oc}$.

Возьмем составляющие этих векторов ∥ их оси вращения

$\vec N_\parallel = \vec N_{c\parallel} + \vec N_{oc\parallel}$, где $\vec N_{c\parallel} = [\vec r_{c\perp}, m\vec v_c]$

$\vec N_{oc} = J\vec\omega$, $(J = J_c)$

$\boxed{\vec N_\parallel = [\vec r_{c\perp}, m\vec v_c] + J\vec\omega}$



§13. Теорема моментов. Закон сохранения момента импульсов.

Одна мат. точка. $\vec N = [\vec r, m\vec v]$

Вычислим произв. по времени $\dot{\vec N} = \underbrace{[\dot{\vec r}, m\vec v]}_{0} + [\vec r, m\dot{\vec v}] = [\vec r, \vec F] = \vec M$.

$\boxed{\dot{\vec N} = \vec M}$ — показываем, что:

Скорость изм. момента импульса частицы равна моменту действ. на неё силы.

Сис-ма частиц.

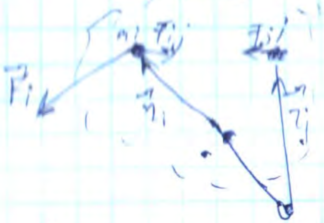
$$\vec N = \sum_i [\vec r_i, m_i \vec v_i]$$

$$\dot{\vec N} = \sum_i \underbrace{[\dot{\vec r}_i, m_i \vec v_i]}_{0} + \sum_i [\vec r_i, m_i \dot{\vec v}_i] =$$

$= \dots$

f — внутренние силы

F — внешние силы



$$\dot{\vec N} = \sum_i [\vec r_i, \vec F_i + \sum_j \vec f_{ij}] = \underbrace{\sum_i [\vec r_i, \vec F_i]}_{\vec M_{внеш}} + \underbrace{\sum_i [\vec r_i, \sum_j \vec f_{ij}]}_{\vec M_{внутр}}.$$

$$\dot{\vec N} = \vec M_{внеш} + \vec M_{внутр}.$$

Докажем, что $\vec M_{внутр} = 0$.

Расс. суммарный $\vec M_{внутр.}$ для одной пары частиц системы.

$$\vec M_{ij} = [\vec r_i, \vec f_{ij}] + [\vec r_j, \vec f_{ji}].$$

По III з-ну Ньютона $\vec f_{ij} = -\vec f_{ji}$

$$\vec M_{ij} = [\vec r_i, \vec f_{ij}] + [\vec r_j, -\vec f_{ij}] = [\underbrace{\vec r_i - \vec r_j}_{\parallel \vec f_{ij}}, \vec f_{ij}] = 0,$$

т.к. $\vec r_i - \vec r_j \parallel \vec f_{ij}$.

$\Rightarrow \vec M_{внутр} = 0$.

$\sum_i \sum_j \vec M_{ij}$

Закон изм. момента импульса сис

$\boxed{\dot{\vec N} = \vec M_{внеш.}}$ — скорость изм. момента импульса сис-мы = сумме моментов внешних сил.

З-н сохранения момента импульса

Если сумма моментов внешних сил = 0, то момент импульса сис-мы сохраняется.

Если $\vec M_{вн.} = 0$, то $\vec N = \sum [\vec r_i, m_i \vec v_i] = const$.

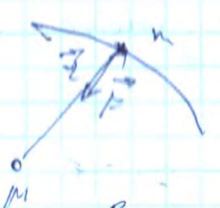
З-н сохр. момента импульса отн. оси:

Если ∃ такая ось, отн. которой сумма моментов внешних сил = 0, то отн. этой оси момент импульса системы сохраняется.

Если $M^{(2)}_{внеш} = 0$, то $N_2 = const$;

Движение частицы в центральном силовом поле

Центральным с. полем наз. поле силы, напр. всегда в сторону одн. и той же точки, наз. силовым центром.



$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] = 0.$$

$$\vec{N} = [\vec{r}, m\vec{v}] = const$$

Выводы: 1) Движение в центральном поле является плоским;

2) в процессе движения сохраняется секторная скорость.

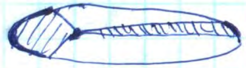
Секторная площадь $d\vec{S} = \frac{1}{2}[\vec{r}, d\vec{r}]$

Секторная скорость $\vec{\sigma} = \frac{d\vec{S}}{dt}$.

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2}\left[\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right] = \frac{1}{2}[\vec{r}, \vec{v}]$$

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2m}[\vec{r}, m\vec{v}] = \frac{\vec{N}}{2m} = const$$

За равные промежутки времени радиус-вектор частицы описывает равные площади.



Солнце и комета Галлея.

§14. Материальные точки в центральном поле

Законы Кеплера:

① Планеты солнечной системы движутся по эллипсам, в общем фокусе которых находится солнце.

② За равные промежутки времени радиус-векторы планеты очерчивают равные площади.

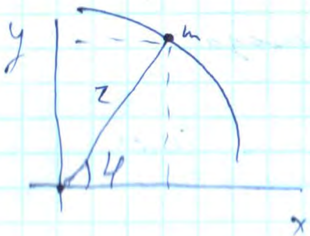
③ Квадраты периодов обращений планет относятся как кубы больших полуосей их

Эллиптические орбиты:

$$\begin{cases} K+\Pi = E = const \\ [\vec r, m\vec v] = \vec N = const \end{cases}$$

$K = \frac{mv^2}{2}$; $\Pi = -G\frac{Mm}{r^2}$. Обозначим $A \equiv GMm$

Тогда $\Pi = -A r$,



r, φ – полярные координаты.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$v^2 = \dot x^2 + \dot y^2$$

$$\begin{cases} \dot x = \dot r\cos\varphi - r\dot\varphi\sin\varphi \\ \dot y = \dot r\sin\varphi + r\dot\varphi\cos\varphi \end{cases}$$

$$v^2 = \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2$$

$$\vec N = [\vec r, m\vec v] = m\begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ x & y & 0 \\ \dot x & \dot y & 0 \end{vmatrix} = m\vec k(x\dot y - y\dot x) =$$

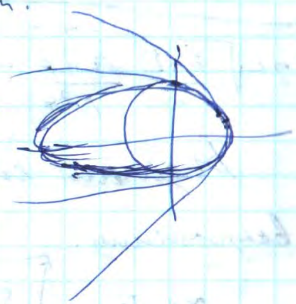
$$= \vec k m r^2\dot\varphi = \vec k N.$$

$$\begin{cases} N = mr^2\dot\varphi = const \\ E = \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) - \frac{A}{r} = const \end{cases}$$

пр

$r(\varphi) = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$; $\overset{const}{p}$ – фокальный параметр.

$\underset{const}{\varepsilon}$ – эксцентриситет.



1) $\varepsilon = 0 \Rightarrow$ движение по окружности.

2) $0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow$ движ. по эллипсу.

3) $\varepsilon = 1 \Rightarrow$ парабола.

4) $\varepsilon > 1 \Rightarrow$ гипербола.

$$\dot\varphi = \frac{N}{mr^2}$$

$$\frac{2E}{m} = \dot r^2 + \frac{N^2}{m^2r^2} - \frac{2A}{mr}$$

$$\begin{cases} \dot r = \pm\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2A}{mr} - \frac{N^2}{m^2r^2}} = \frac{dr}{dt} \\ \dot\varphi = \frac{N}{mr^2} = \frac{d\varphi}{dt} \end{cases}$$

Чтобы исключить время разделим 1-ое ур-е на 2-ое

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{mr^2}{N}\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2A}{mr} - \frac{N^2}{m^2r^2}} =$$

$$\pm r^2\sqrt{\frac{2mE}{N^2} + \frac{2mA}{N^2r} - \frac{1}{r^2}} = \frac{dr}{d\varphi}$$ – ур-е траектории в дифференциальной

Разделим переменные.

$$\frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{2mE}{N^2}+\frac{2mA}{N^2 r}-\frac{1}{r^2}}}=\pm d\varphi.$$

Выделим полный квадрат в подкоренном выражении.

$$\boxed{s=\frac{1}{r} \quad ds=-\frac{dr}{r^2}}$$

$$\frac{ds}{\sqrt{\frac{2mE}{N^2}+\frac{2mA}{N^2}s-s^2}}=\pm d\varphi.$$

$$\frac{2mE}{N^2}+\frac{2mA}{N^2}s-s^2=\frac{2mE}{N^2}-\left(s^2-2s\frac{mA}{N^2}+\frac{m^2A^2}{N^4}\right)+\frac{m^2A^2}{N^4}=$$

$$=\frac{2mE}{N^2}+\frac{m^2A^2}{N^4}-\Big(\underbrace{s-\frac{mA}{N^2}}_{x}\Big)^2=$$

Обозначим $a^2=\frac{2mE}{N^2}+\frac{m^2A^2}{N^4}$

$$x=s-\frac{mA}{N^2}$$

$=a^2-x^2$; $dx=ds$.

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\pm d\varphi.$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=d\left(\arcsin\frac{x}{a}\right);$$

$\sin\psi=\frac{x}{a}\ \to\ \cos\psi\, d\psi=\frac{dx}{a}=$

$=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,d\psi=\frac{dx}{a}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\,d\psi$

$d\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)=\pm d\varphi$. Сами величины отличны не более чем на const.

$$\arcsin\frac{x}{a}=\pm\varphi+\text{const}.$$

Положим $\text{const}=\frac{\pi}{2}$ и выберем знак „$-$".

$$\arcsin\frac{x}{a}=\frac{\pi}{2}-\varphi,$$

$$\frac{x}{a}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\varphi;$$

$$x=a\cos\varphi.$$

$$x=\frac{1}{r}-\frac{mA}{N^2}=a\cos\varphi.$$

$$\frac{1}{r}=\frac{mA}{N^2}+a\cos\varphi;$$

$$r=1\Big/\left(\frac{mA}{N^2}+a\cos\varphi\right)=\frac{N^2/mA}{1+a\frac{N^2}{mA}\cos\varphi}.$$

$$r(\varphi) = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}, \text{ где } p = \frac{N^2}{mA},$$

$$\varepsilon = a\frac{N^2}{mA} = \frac{N^2}{mA}\sqrt{\frac{2mE}{N^2}+\frac{m^2\alpha^2}{N^4}} =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{2N^2E}{mA^2}}$$

$$\boxed{p = \frac{N^2}{mA},\quad \varepsilon = \sqrt{1+\frac{2N^2E}{mA^2}},\quad A = GmM}$$

При движ. по окружности $\varepsilon = 0 \Rightarrow \frac{2N^2E}{mA^2} = -1$;

Эллипс, $\varepsilon<1 \Rightarrow E<0$

Парабола $\varepsilon = 1 \Rightarrow \frac{2N^2E}{mA^2} = 0 \Rightarrow E = 0$

Гипербола $\varepsilon > 1 \Rightarrow \boxed{E>0}$

§15. Плоское движение твёрдого тела.

Плоское движ.: все точки тела движ. $\parallel$ нек. неподвижн. плоскости.

~~Уравнение движения центра масс~~

$$m\ddot{\vec{r}}_c = \vec{F}_{вн}$$

Уравнение вращения.

Вращение вокруг неподвижной оси.

$$\left.\begin{aligned} &§13: \dot{\vec{N}} = \vec{M} \rightarrow \dot{\vec{N}}_\parallel = \vec{M}_\parallel \\ &§12: \vec{N}_\parallel = J\vec{\omega} \end{aligned}\right\} J\cdot\dot{\vec{\omega}} = \vec{M}_\parallel$$

Введем $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ - угловое ускорение вращ. тела

$$J\dot{\omega}_z = M_z$$

$J\varepsilon_z = M_z$, где J - момент инерции тела отн. данной оси,

$$J = \sum_i m_i r_{i\perp}^2;\quad M_z = \sum_i F_{вн\, i\, z}$$

Пример. Физический маятник

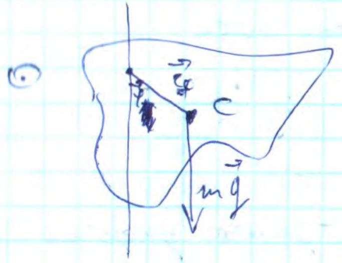
Вычислим суммарный момент сил тяжести.

$$\vec{M} = \sum_i [\vec{r}_i, m_i\vec{g}] = [\sum_i m_i\vec{r}_i, \vec{g}] = \ominus$$

$$\vec{R}_c = \frac{1}{m}\sum m_i\vec{r}_i,\quad m = \sum_i m_i.$$

$$\ominus = [m\vec{r}_c, \vec{g}] = [\vec{r}_c, m\vec{g}].$$

Суммарный момент силы отн. масс, как если бы вся масса нам находилась в ось центре масс.



Выберем полож. оси z по правилу правого винта.

$$\omega_z = \dot\varphi$$

$$\varepsilon_z = \dot\omega_z = \ddot\varphi$$

$$\vec M = [\vec r_{c\perp}, m\vec g]$$

$$M_* = \underbrace{r_{c\perp}}_{=l} mg\sin\varphi = mgl\sin\varphi.$$

$$M_z = -M_* = -mgl\sin\varphi$$

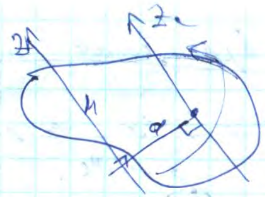
$$J\ddot\varphi = -mgl\sin\varphi$$

$$\boxed{\ddot\varphi + \frac{mgl}{J}\sin\varphi = 0.}$$

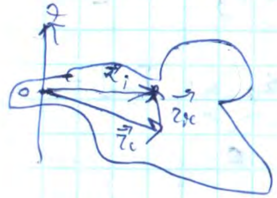
– ур-е колебаний физ. маятника.

<u>Теорема Гюйгенса-Штейнера</u>. Момент инерции тела (J) отн. произвольной оси = моменту инерции отн. оси, проходящей через центр масс тела || данной + (полная масса тела × квадрат расст. между осями).

$$J = J_c + ma^2$$



$$J = \sum_i m_i r_{i\perp}^2$$



$$\vec r_i = \vec r_c + \vec r_{ic};$$

$$\vec r_{i\perp} = \vec r_{c\perp} + \vec r_{ic\perp};$$

$$r_{i\perp}^2 = \vec r_{i\perp}\cdot\vec r_{i\perp}$$

$$J = \sum_i m_i(\vec r_{c\perp} + \vec r_{ic\perp})(\vec r_{c\perp} + \vec r_{ic\perp}) = m r_{c\perp}^2 +$$

$$+ \sum_i m_i r_{ic\perp}^2 + 2\vec r_{c\perp}\sum m_i \vec r_{ic}$$

$$\sum_i m_i \vec r_{ic} = \sum_i m_i(\vec r_i - \vec r_c) = m\vec r_c - m\vec r_c = 0.$$

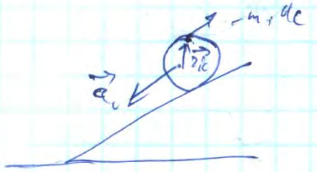
$$\Rightarrow \sum m_i \vec r_{ic\perp} = 0.$$

$$\boxed{J = J_c + ma^2}$$

<u>Пример</u>. обруч.

$$J = mR^2 + mR^2 = 2mR^2.$$

Ур-е вращения тела отн. движ. оси, прох. через центр масс.



$$\vec M_{ин} = \sum_i [\vec r_{ic}, -m_i \vec a_c] =$$

$$= -[\underbrace{\sum r_{ic} m_i}_{0}, \vec a_c] = 0.$$

$\Rightarrow \boxed{J\varepsilon_z = M_z}$, сил инерции добавлять не надо.

Итог: Это ур-е вращения справедливо и для неподвижной оси и для движ. оси, прох. через центр масс тела

Сводка ур-й для плоского движ. тела

1) $m\vec a_c = \vec F_{вн}$
2) $J\varepsilon_z = M_z$
3) $\vec P = m\vec v_c$
4) $K = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$
5) $\vec K_O = [\vec r_{c}, m\vec v_c] + J\vec\omega$ $(J = J_c)$

Аналитическая механика.

§16. Системы со связями.

Степени свободы. Обобщенные координаты.

Связями в механике называют не вытекающие из уравнений движения ограничения на координаты, скорости и ускорения точек механич. системы.

Связи осущ. стержнями, нитями, поверхностями разл. тел. Силы, с кот. тела, осуществляющие связи, действ. на тела системы наз. силами реакции или реакциями связи. ($\vec R$)

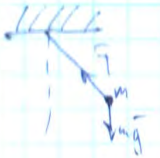
Математически связи выражаются ур-ями связи, т.е. соотн. между координатами, скоростями и ускорениями точек системы.

Пример: машина Атвуда.

$$\begin{cases} m_1\ddot x_1 = m_1 g - T \\ m_2\ddot x_2 = m_2 g - T \\ l = x_1 + x_2 + \pi R \end{cases}$$

$\dot x_1 + \dot x_2 = 0$; $\ddot x_1 + \ddot x_2 = 0$

Пример: математический маятник.



$$x^2+y^2+z^2=l^2$$

T — сила реакции

Заданные силы — известные функции коорд. и скоростей частиц, либо известные постоянные. ($\vec F$)

$$2x\dot x+2y\dot y+2z\dot z=0$$

$$(\vec r,\vec v)=0$$

$$\dot x^2+x\ddot x+\dot y^2+y\ddot y+\dot z^2+z\ddot z=v^2+(\vec a,\vec r)=0.$$

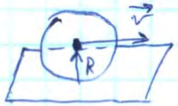
$$v^2+(a_r, r)=v^2+a_r r \Rightarrow a_r=-\frac{v^2}{r}.$$

Классификация связей

Голономные (сводящиеся к ур-ям только на коорд. тел)

Неголономные (напр.: качение)

Пример: шар на плоскости.



$$\vec v=[\omega, R].$$

Стационарные (ур-е не сод. время в явном виде)

Нестационарные (—//— содержит)

Пример: матем. маятник, длина кот. изм-ся по зад. з-ну.

$$x^2+y^2+z^2=l^2(t).$$

В сис-мах с нестац. св-ями возможно несохр. мех. энергии.

Задача механики несвоб. сис-мы — отыскание закона движения и сил реакции по заданным силам и ур-ям связи.

$$\left.\begin{aligned} m_i\ddot{\vec r}_i&=\vec F_i+\vec R_i,\quad i=\overline{1,N}\\ f_\alpha(\vec r_1,\dots,\vec r_N,t)&=0\quad \alpha=1,\dots,k\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&N\text{ — число м.т.}\\&k\text{ — число связей}\end{aligned}$$

1) число степеней свободы сис-мы — число независимых координат, полностью определяющих положение сис-мы в пр-ве. (об-е: s)

2) обобщенными скоростями — $\forall s$ координат, полностью опред. пол-е сис-мы в пространстве: $(q_1,\dots,q_s)=\{q\}$.

3) обобщ. ск-ти — производные обобщ. коорд. по времени $(\dot q_1,\dots,\dot q_s)=\{\dot q\}$.

Как найти число s:

Если система сост. из N точек с K ур-ий связи $\Rightarrow s=3N-K$.

$N=1,\ K=0,\ s=3$

$N=2,\ K=0,\ s=6$

$\Rightarrow (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2=l^2 \Rightarrow N=2, k=1, S=5.$

$N=3,\ k=3,\ S=6.$

$\forall$ тв. тела: $S=6$

Свойства обобщ. координат:

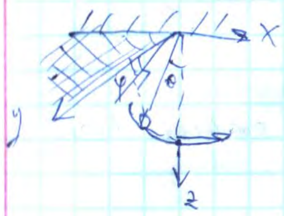
1) Радиус-векторы т. сис-мы — однозначные ф-ции обобщ. координат.

$$\bar r_i = \bar r_i(q_1,\dots,q_s,t).$$

2) Обобщ. коорд. обращ. в тождество ур. связи.

$$f_\alpha(\bar r_1,\dots,\bar r_N,t)\big|_{\bar r=\bar r(q)} \equiv 0.$$

Пример: сферич. маятник.



$N=1 \quad k=1 \Rightarrow S=2$

$x^2+y^2+z^2=l^2$

$$\left.\begin{matrix} q_1=\theta \\ q_2=\varphi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=l\sin\theta\cos\varphi \\ y=l\sin\theta\sin\varphi \\ z=l\cos\varphi \end{cases}$$

$x^2+y^2+z^2\equiv 0.$

§17. Виртуальное перемещение. Виртуальная работа. Идеальные связи.

Действительное перемещение — б.м. перемещение точки, происх. под действием как заданных сил, так и сил реакции. ($d\bar r$).

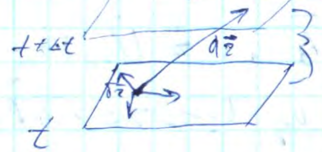
Оно обладает длительностью dt и происх-т в соотв. с ур-ми движ. и ур. связи.

Виртуальное перемещение — воображ. б.м. перемещение точки, допускаемое связями в данный момент времени t ($\delta\bar r$) ($t=\mathrm{const}$).

Оно не обладает длительностью и не зависит от заданных сил.

Пример: стационарн. связь.

нестационарн. связь.



$\}\ dr = u\,dt$

Математ-е опр-е:

$$\bar r_i = \bar r_i(q_1,\dots,q_s,t)$$

$$\delta \vec r_l = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec r_l}{\partial q_j}\delta q_j;\ l=\overline{1,N}.$$

δ – действует как обычный дифф-л по отн. к коорд., но не ко времени.

Вирт. работа – работа силы на вирт. перемещении. $\delta A = (\vec F, \delta \vec r)$.

Идеальная связь – связь, для которой δA силы реакции равна нулю.

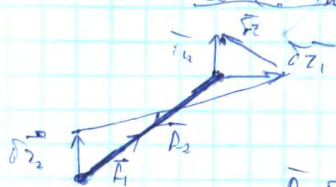
$$\delta A_R = \sum_{l=1}^{N} (\vec R_l, \delta \vec r_l) = 0.$$

Пример: абс. гладкая пл-ть:

$$(\vec R, \delta \vec r) = 0$$

Это верно для пов-ти + формы, даже если связь нестац. Главное – гладкость.

Невес. ~~жесткий стержень~~:



$$\vec R_1 = -\vec R_2$$

$$\delta A_R = (\vec R_1, \delta \vec r_1) + (\vec R_2, \delta \vec r_2) =$$

$$= \vec R_1 \delta \vec r_1 + (-\vec R_1)\delta \vec r_2 = (\vec R_1, \delta\vec r_1 - \delta \vec r_2) =$$

$= (\vec R, \delta(\vec r_1 - \vec r_2)) = (\vec R_1, \delta \vec r) \Rightarrow$ из $R_1 = \alpha \vec r \Rightarrow \delta A_R =$

$$= (\alpha \vec r, \delta \vec r) = \alpha(x\delta x + y \delta y + z\delta z) = \frac{\alpha}{2}(\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2)$$

$$= \frac{\alpha}{2}\delta(x^2+y^2+z^2) = \frac{\alpha}{2}\delta(r^2) = \frac{\alpha}{2}\delta(b^2) = 0. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ связь идеальна.

Качение без проскальз.

$(\vec R, \delta \vec r) = 0$, т.к. $\delta \vec r = 0$.

§12. Ур-е Лагранжа.

Обобщенные силы. Система с идеальными голономными связями.

$$m_l \ddot{\vec r}_l = \vec F_l + \vec R_l,\ l=\overline{1,N}$$

$$\delta A_R = \sum_{l=1}^N (\vec R_l, \delta \vec r_l) = 0.$$

$$\delta \vec r_l = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec r_l}{\partial q_j}\delta q_j$$

Получим ур-е, в кот. не входят силы реакции:

$\sum_{l=1}^N m_l(\ddot{\vec r}_l, \delta \vec r_l) = \sum_{l=1}^N (\vec F_l, \delta \vec r_l)$ – ур-е Даламбера-Лагранжа.

$$\sum_{l=1}^N \left((m_l \ddot{\vec r}_l - \vec F_l), \delta \vec r_l\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{l=1}^N \left((m_l\ddot{\vec r}_l - \vec F_l), \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec r_l}{\partial q_j}\delta q_j\right) = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{j=1}^s \delta q_j \sum_{l=1}^N \left(m_l \ddot{\vec r}_l - \vec F_l, \frac{\partial \vec r_l}{\partial q_j}\right) = 0.$$

Обозначим. $\sum_{e=1}^{N} \left(F_e, \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}\right) = Q_j$ (обобщ. сила)

$$\sum_{e=1}^{N} \left(m_e \ddot{\vec{r}}_e, \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}\right) = X_j$$

$$\sum_{j=1}^{s} \delta q_j \left(X_j - Q_j\right) = 0$$

т.к. обобщ. коорд. независимы $\Rightarrow \forall_j \; X_j - Q_j = 0, \; j = \overline{1,s}$.

$$X_j = Q_j \qquad j = 1, \dots, s$$

$$\begin{cases} X_j = \sum_{e=1}^{N} m_e \ddot{\vec{r}}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \\ Q_j = \sum_{e=1}^{N} F_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \end{cases}$$

$$X_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j}$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N} m_e v_e^2 = K(q, \dot{q}, t)$$

$$\vec{r}_e = \vec{r}_e(q_1, \dots, q_s, t)$$

$$\vec{v}_e = \frac{d\vec{r}_e}{dt} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial t} dt.$$

$\Rightarrow \vec{v}_e = \vec{v}_e(q, \dot{q}, t) \Rightarrow$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N} m_e \vec{v}_e \cdot \vec{v}_e = K(q, \dot{q}, t).$$

$$\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial K}{\partial q_j} = \sum_{e=1}^{N} m_e \vec{v}_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial q_j}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{e=1}^{N} m_e \vec{v}_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{e=1}^{N} m_e \vec{v}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) = \sum_{e=1}^{N} m_e \dot{\vec{v}}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j} + \sum_{e=1}^{N} m_e \vec{v}_e \frac{\partial \dot{\vec{r}}_e}{\partial q_j} = X_j + \frac{\partial K}{\partial q_j} \Rightarrow X_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j}, \; j = \overline{1,s}.$$

$$K = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{N} m_e v_e^2 = K(q, \dot{q}, t) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j$$

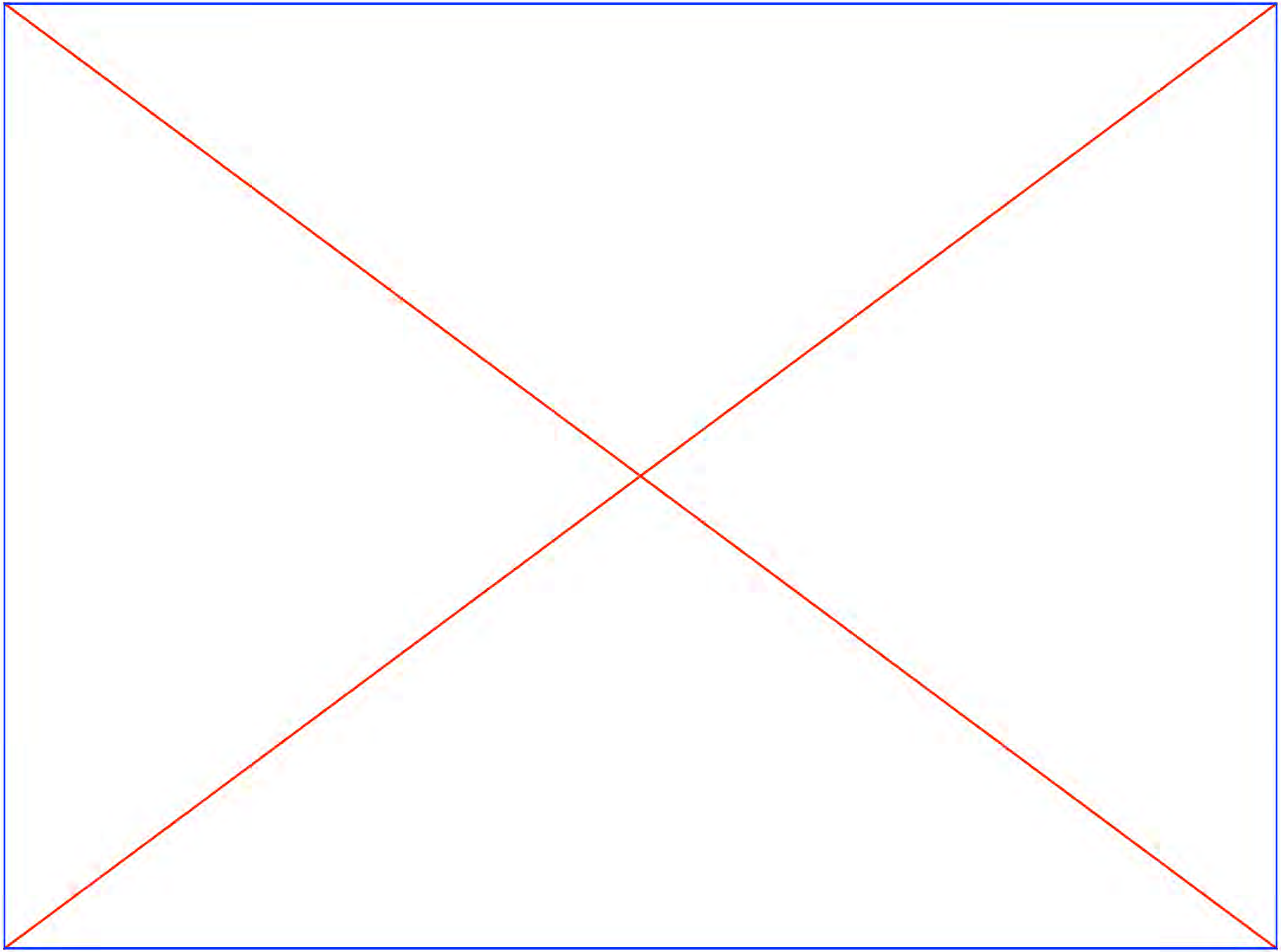
ур-я Лагранжа отн. кинетической энергии системы.

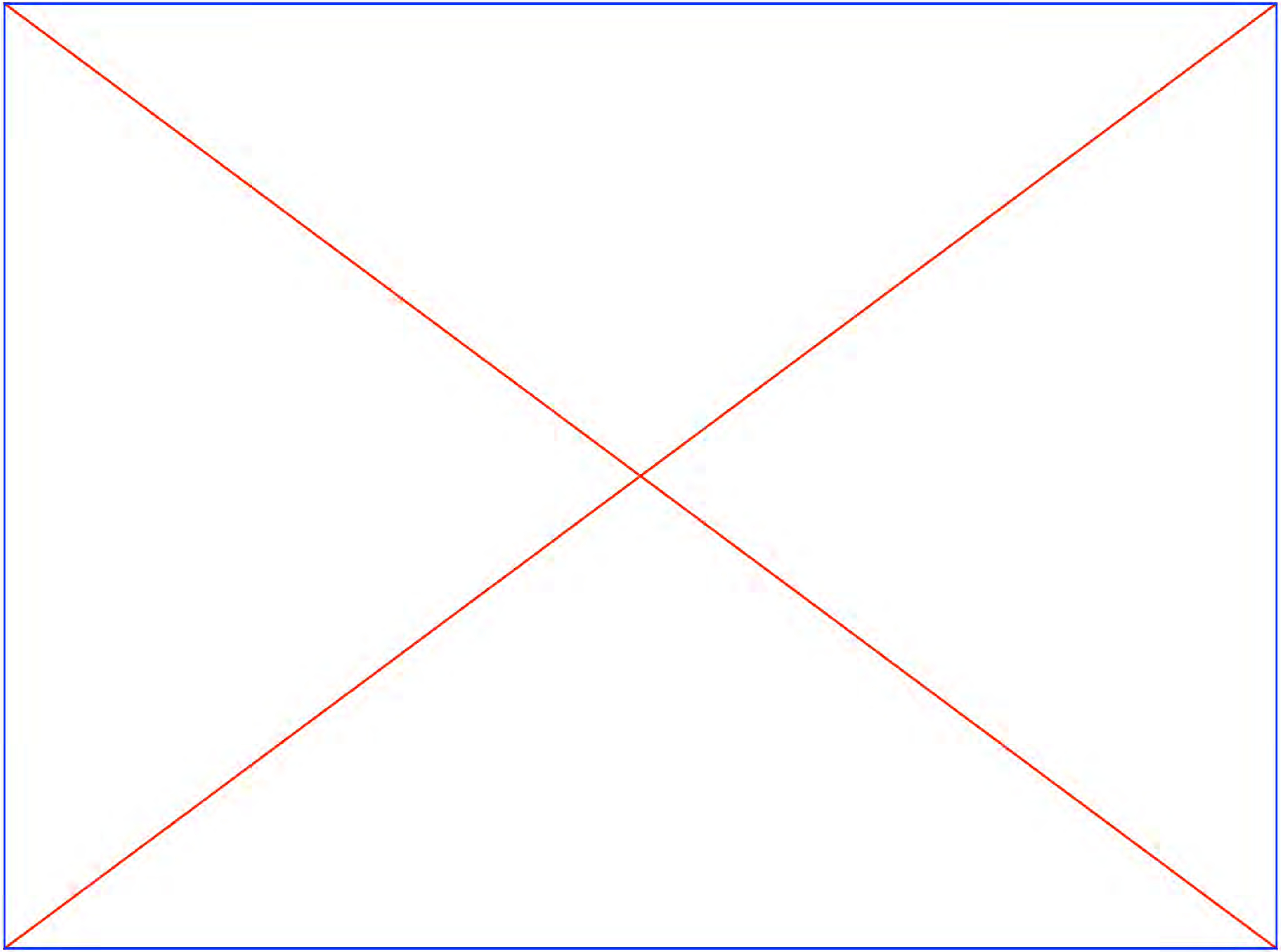
если консерв. $Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$

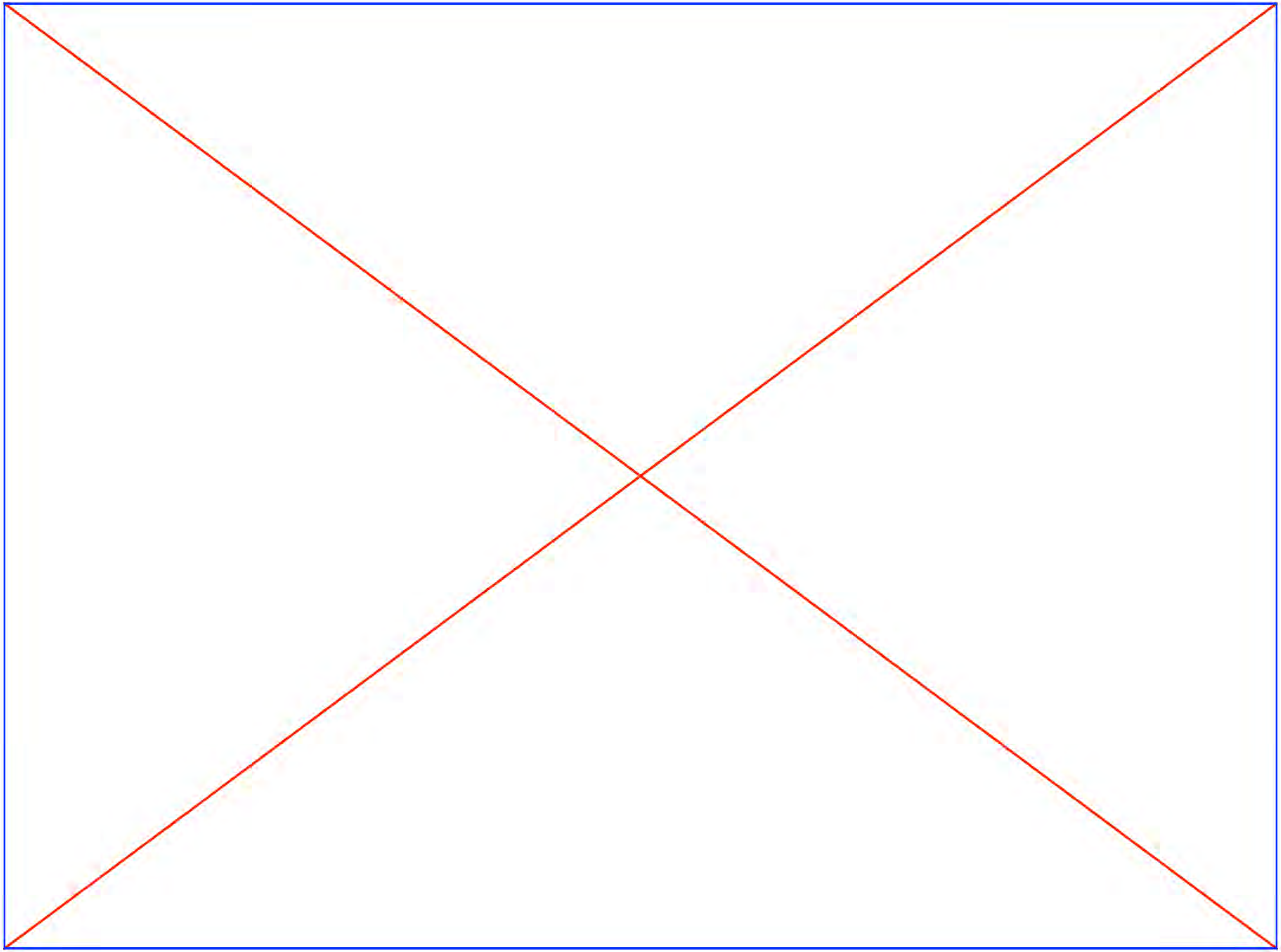
<u>Обобщенные силы.</u>

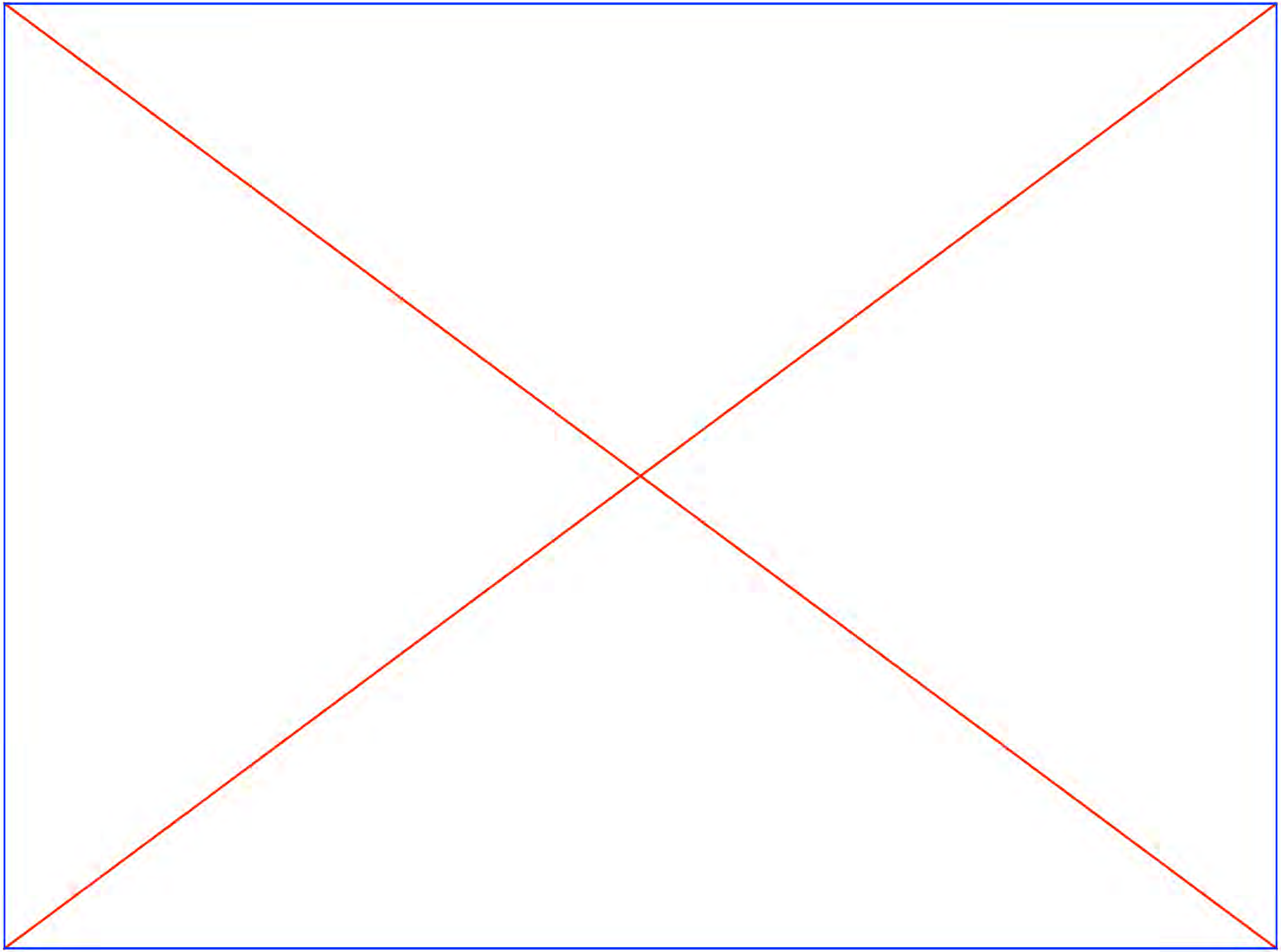
Величина, опр. формулой $\boxed{Q_j = \sum_{e=1}^{N} \vec{F}_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_j}}$, j

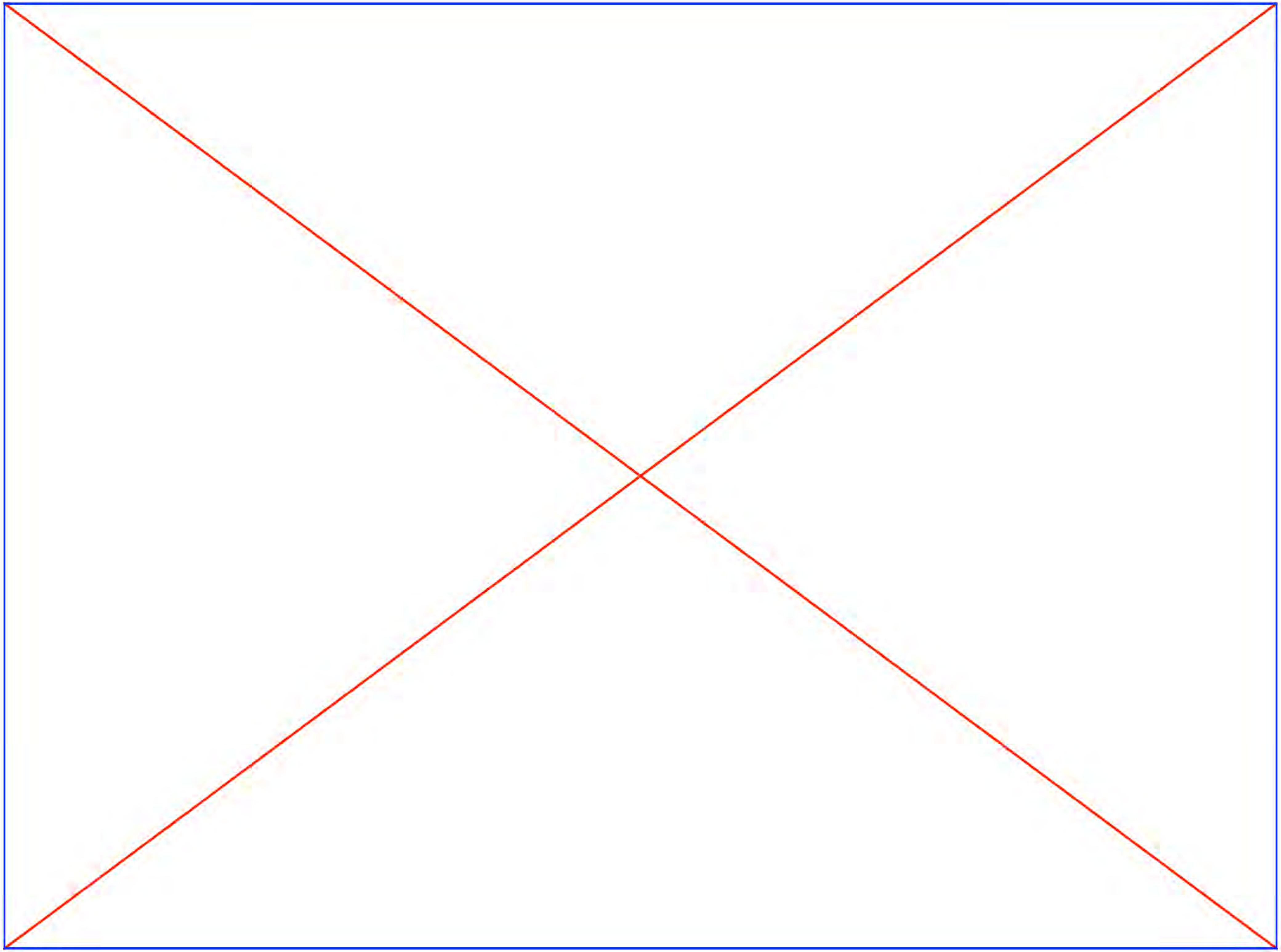
Размерность $[Q] = \frac{Дж}{[q]}$.











Символ Кронекера: $\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha=\beta \\ 0, & \alpha\neq\beta \end{cases}$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} k_{\alpha\beta}(\dot q_\beta\,\delta_{\alpha j} + \dot q_\alpha\,\delta_{\beta j}) = \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{s}\dot q_\beta \cdot \sum_{\alpha=1}^{s} k_{\alpha\beta}\,\delta_{\alpha j} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}\dot q_\alpha \sum_{\beta=1}^{s} k_{\alpha\beta}\,\delta_{\beta j} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{s}\dot q_\beta\, k_{j\beta} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s}\dot q_\alpha\, k_{\alpha j} \overset{k_{\alpha j}=k_{j\alpha}}{=} \boxed{\sum_{\alpha=1}^{s}\dot q_\alpha\, k_{j\alpha} = p_j}, \quad j=\overline{1,s}$$

Обобщ. импульс есть лин. комбин. обобщ. скоростей системы.

$\Rightarrow \dot q_j \to p$

$$\sum_{j=1}^{s} p_j\dot q_j = \sum_{j=1}^{s}\dot q_j \sum_{\alpha=1}^{s} k_{j\alpha}\,\dot q_\alpha = \sum_{\alpha,j=1}^{s}\sum k_{j\alpha}\,\dot q_j\,\dot q_\alpha$$

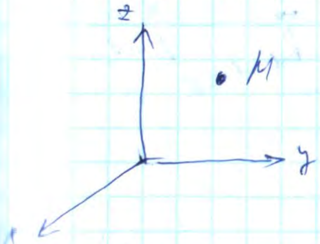
$$= 2K.$$

$$H = \sum_{j=1}^{s} p_j\dot q_j - L = 2K - K + \Pi = K + \Pi = E_{\text{полн}}$$

Гамильт. консерв. сис-мы — это полная механич. энергия сис-мы, выраженная через обобщ. координаты и обобщ. импульсы

$$\boxed{H = K + \Pi = H(q,p)}$$

Пример. Частица в потенциальном силовом поле.



$\Pi = \Pi(x,y,z)$.

$s = 3$.

$H = K + \Pi = H(q,p)$.

$q_1 = x,\ q_2 = y,\ q_3 = z$.

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2)$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot x} = \frac{\partial K}{\partial \dot x} = m\dot x;\ p_y = m\dot y;\ p_z = m\dot z.$$

$$\dot x = \frac{p_x}{m},\quad \dot y = \frac{p_y}{m},\quad \dot z = \frac{p_z}{m}$$

$$K = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Pi(x,y,z)}$$

§21. Равновесие сис-мы и ее устойчивость.

Равновесие — такое сост. системы, в котором сис-ма, предоставленная самой сей, может находиться как угодно долго.

Условие равновесия

$$m_l \ddot{\vec r}_l = \vec F_l + \vec R_l, \quad l = 1, \dots, N$$

В равновесии $\ddot{\vec r}_l = 0$.

(1) $\vec F_l + \vec R_l = 0$, $l = 1, \dots, N$.

Сумма заданных сил и сил реакции действ. на точку $= 0$ $\forall$ точки сис-мы.

Рассм. равновесие сис-мы с идеальными голономными стационарными связями.

$\sum_{l=1}^{N} \vec R_l \delta \vec r_l = 0$ — идеальные связь.

(1) $\cdot \delta \vec r_l$ и сумма по всем точкам: $\sum_{l=1}^{N} \vec F_l \delta \vec r_l = 0$ (2)

Перейдем к набору обобщенных координат

$\vec r_l = \vec r_l(q_1, \dots, q_s)$, $l = \overline{1,N}$.

$$\delta \vec r_l = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec r_l}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$\sum_{l=1}^{N} \vec F_l \delta \vec r_l = \sum_{l=1}^{N} \vec F_l \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec r_l}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{s} \delta q_j \cdot$$

$$\underbrace{\sum_{l=1}^{N} \vec F_l \frac{\partial \vec r_l}{\partial q_j}}_{Q_j} = \sum_{j=1}^{s} Q_j \delta q_j = 0.$$

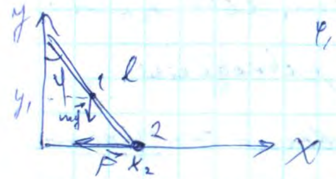
Из независ. обобщ. координат следует,

что $Q_j = 0$ $\forall j = \overline{1,s}$.

(3) $\boxed{Q_j = 0}$, $j = 1, s$

Итак, в сост. равновесия все обобщ. силы должны быть равны 0.

Пример



$\varphi, m, g, \ F - ?$

$s = 1$, $q = \varphi$.

$$Q = \sum_{l=1}^{N} \vec F_l \frac{\partial \vec r_l}{\partial q} = m\vec g \frac{\partial \vec r_1}{\partial \varphi} + \vec F \frac{\partial \vec r_2}{\partial \varphi} =$$

$$= -mg \frac{\partial y_1}{\partial \varphi} - F \frac{\partial x_2}{\partial \varphi}$$

$y_1 = \frac{l}{2} \cos\varphi$; $x_2 = l \sin\varphi$.

$\frac{\partial y_1}{\partial \varphi} = -\frac{l}{2} \sin\varphi$; $\frac{\partial x_2}{\partial \varphi} = l \cos\varphi$.

$$Q = \frac{mgl}{2} \sin\varphi - Fl\cos\varphi = 0.$$

$$\boxed{F = \frac{mg}{2} \operatorname{tg}\varphi}$$

Пусть все заданные силы потенциальные, тогда $Q_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}$, $Q_j = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0$, $j = \overline{1,s}$ (4)

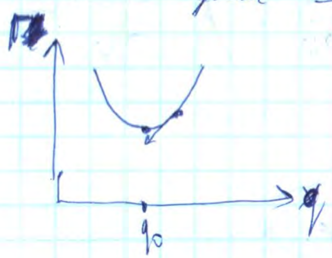
В сост. равновесия потенц. энергия сис-мы должна иметь эксплуатации по всем обобщ. координатам.

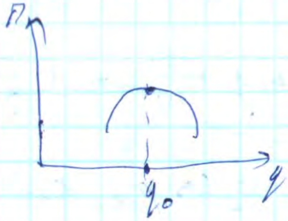
Устойчивость равновесия.

Равновесие наз. устойчивым, если система, выведенная из этого сост. и предост. себе начинает двигаться в сторону пол. равновесия.

Если удаляется от равновесия => неустойчивое

Если не двиг => безразличное сост. сис-мы.





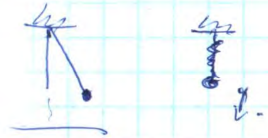
устойчивое неустойчивое.

Пример.

неустойчивое.

§22. Колебание в системах с одной степенью свободы.

Колебанием наз. повторяющееся движение окрестности положения устойчивого равновесия системы



В сис-ме нет идеальных голономных стац. связей или вообще их нет связей.

$S=1.\quad q$

обозначим $x = q - q_0$.

$\dot{x} = \dot{q}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

$$L = K - П.$$

$$П = П(x) = П(x=0) + \frac{\partial П}{\partial x}\bigg|_{x=0} x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 П}{\partial x^2}\bigg|_{x=0} x^2$$

$П(x=0) = 0$ – выбрали нач. отсчёта.

$\frac{\partial П}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$ – в силу равновесия (ур. (5)).

⊥ Малые колебания $x \to 0$. $\Rightarrow П = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 П}{\partial x^2}\Big|_{x=0} x^2 = \frac{1}{2} П_1$

где $П_1 = \frac{\partial^2 П}{\partial x^2}\Big|_{x=0} = const > 0$.

$K = \frac{1}{2}\sum_{e=1}^{N} m_e v_e^2 = \frac{1}{2}\sum_{e=1}^{N} m_e \vec{v}_e \vec{v}_e$, $v_e = \dot{\vec{r}}_e$, $\vec{r}_e = \vec{r}_e(q_1, \ldots)$

$\vec{v}_e = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha$

$$K = \frac{1}{2}\sum_{e=1}^{N} m_e \left(\sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha\right)\left(\sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta\right) = \frac{1}{2}\sum\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$$

$$\underbrace{\sum_{e=1}^{N} m_e \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q_\beta}}_{k_{\alpha\beta}(q)}$$

Колебания малые, $q \to q_0$.

$k_{\beta\alpha}(q_0) = k_{\alpha\beta}(x=0) = const.$

$K = \frac{1}{2}k_1 \dot{x}^2$, $k_1 = const > 0$.

$$L = K - \Pi = \frac{1}{2}k_1\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\Pi_1 x^2$$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = k_1 \dot{x}$; $\frac{\partial L}{\partial x} = -\Pi_1 x$.

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$

$k_1 \ddot{x} + \Pi_1 x = 0$

$\ddot{x} + \frac{\Pi_1}{k_1} x = 0.$ $\frac{\Pi_1}{k_1} > 0.$

Обозначим $\frac{\Pi_1}{k_1}$ через ω^2 $[\omega] = c^{-1}$.

$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$ — ур-е гармонич. колебаний.

где x — обобщ. координата, хар. отклонение от устой. равновесия системы, ω — частота колебаний.

<u>Общее решение</u>:

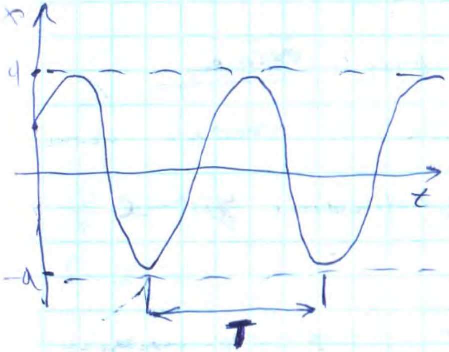
$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, x — координата, где t — время, ω — частота, φ — нач. фаза, A — амплитуда.

<u>Проверим</u>. $\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$

$\ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x.$

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$ 23.11.

<u>Гармонические</u> нач. колебания происходящие по з-ну cos или sin.



T — период колебаний. $T = \frac{2\pi}{\omega}$

A — амплитуда.

φ — начальная фаза $\omega t + \varphi$ — фаза.

Амплитуда и нач. фаза зависят от нач. усл.

Начальные условия:

$$\begin{cases} x(t_0=0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0=0) = \dot{x}_0 \end{cases} \qquad (!)\quad A, \varphi - ?$$

$$\begin{cases} A\cos\varphi = x_0; \\ -A\omega\sin\varphi = \dot{x}_0. \end{cases}$$

$$A^2 = x_0^2 + \dot{x}_0^2/\omega^2;$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \dot{x}_0^2/\omega^2} \\ \cos\varphi = x_0/A, \quad \sin\varphi = -\dfrac{\dot{x}_0}{A\omega}. \end{cases}$$

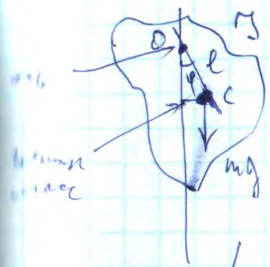
Частота колебаний ω не зависит от нач. усл., а определяется устройством системы.

<u>Метод определения частот.</u>

1) Пользуясь ур-ем Ньютона или ур-ями Лагранжа записать ур-е движения системы.

2) Привести его к стандартному виду $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ (част. усл. малых колебаний).

<u>Пример.</u> физический маятник.



$s = 1, \quad q = \varphi. \quad \dot{q} = \dot{\varphi}$

$$K = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{J\dot{\varphi}^2}{2}$$

$$П = -mgl\cos\varphi.$$

$$L = K - П = \frac{J\dot{\varphi}^2}{2} + mgl\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

$$J\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0.$$

малые колебания $\varphi \ll 1$.

$\sin\varphi = \varphi;$

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{J}\varphi = 0 \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}},$$

m — масса маятника

g — уск. своб. падения

l — расст. от оси вращ. до центра масс

J = момент инерции отн. оси вращения.

<u>Пример</u> Математ. маятник.

$J = ml^2. \quad \omega = \sqrt{\dfrac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\dfrac{g}{l}},$

$T = 2\pi\sqrt{l/g}$ — ф-ла Гюйгенса

$l = 1$ м $T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\pi^2}}$ с $\approx \underline{\underline{2\text{ с}}}$

Пример: обруч

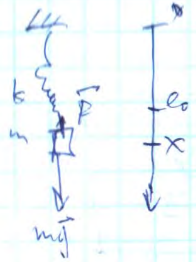
$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$

$l = R$

$J = mR^2 + mR^2 = 2mR^2.$

$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{2mR^2}} = \sqrt{\frac{g}{2R}}.$

Пружинный осциллятор.



l_0 — длина невд. пружины.

$m\ddot{x} = mg - k(x - l_0)$

$m\ddot{x} + k(x - l_0) - mg = 0.$

$m\ddot{x} + k(\underbrace{x - l_0 - \frac{mg}{k}}_{y}) = 0;$

$\ddot{x} = \ddot{y} \Rightarrow$

$\Rightarrow m\ddot{y} + ky = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

§23. Физические эффекты в колебательных системах

1. Гармонические колебания

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0.$

$12^{30} - 14^{10}$

$14^{30} - 14^{50}$

Учебник: Никитин, Чесноков „Механика"

Нормальные колебания — гармонические колебания всех частиц сис-мы.

① ω_1 $\theta_2 = 0$ $\theta_2(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0;$

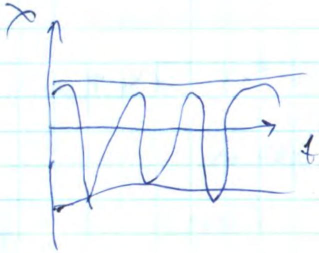
$\Rightarrow x_1(0) = x_2(0)$, $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0);$

и т.д.

② ω_2 $\theta_1 = 0 \Rightarrow \theta_1(0) = \dot{\theta}_1(0) = 0;$

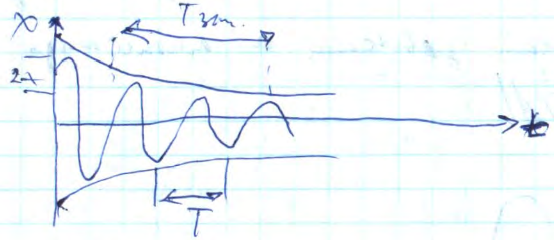
$x_1(0) = -x_2(0)$ $\dot{x}_1(0) = -\dot{x}_2(0).$

и т.д.



② Затухающие колебания

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$



T — период колебаний

$T_{зат}$ — время затухания (в e раз).

Добротность колебания $Q = T_{зат}/T$.

③ Нелинейные колебания.

$$\ddot{x} + f(x) = 0.$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

$\varphi(t)$ — ? З-н сохр. энергии:

$$K + \Pi = E = const.$$

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}, \quad \Pi = -mgl\sin\varphi.$$

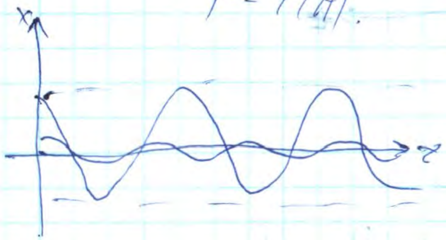
$$\frac{ml^2\dot\varphi^2}{2} - mgl\cos\varphi = E$$

$$\dot\varphi = \pm\sqrt{\frac{2E}{ml^2}+\frac{2g}{l}\cos\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{a+b\cos\varphi}} = \pm\int_0^t dt = \pm t.$$

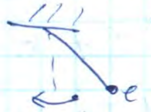
T — эллиптический интеграл.

У нелинейного осциллятора период колебаний зависит от амплитуды. $T=T(A)$.



④ Параметрические колебания.

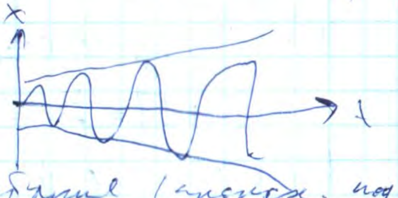
$\ddot x + \omega^2(t)x = 0$, где $\omega(t)$ — заданная ф-ция от времени.



$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Параметрический резонанс — раскачка колебаний за счет работы непотенц. сил.

$l=l(t) \Rightarrow \omega=\omega(t)$.



⑤ Вынужденные колебания (происх. под действием периодически изменяющейся внешней силы.

$$\ddot x + \alpha\dot x + \omega_0^2 x = F(t)$$

$$F(t) = F_0\cos\omega t$$

ω_0 — собств. частота колебаний сис-мы,

ω — частота внешней системы.

Частное решение. Ф-ла Эйлера: $\cos\omega t = \frac12 e^{i\omega t}+\frac12 e^{-i\omega t} = \frac12 e^{i\omega t}+к.с.$

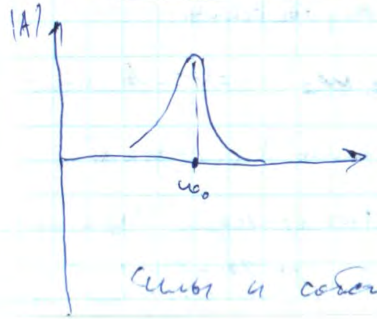
Ищем решение в виде: $x(t)=\frac12 A e^{i\omega t}+к.с.$

$$\begin{cases}\dot x = \frac12 Ai\omega e^{i\omega t}+к.с.\\ \ddot x = -\frac12 A\omega^2 e^{i\omega t}+к.с.\end{cases}$$

$$A(-\omega^2+\omega_0^2+i\alpha\omega)A = F_0.$$

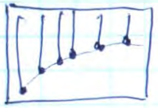
$A = \frac{F_0}{\omega_0^2-\omega^2+i\alpha\omega}$; Это решение соотв. режиму установившихся колебаний. Это решение устанавливается на дост. больших временах.

Зависимость амплитуды от частоты:



— Резонанс (возрастание амплитуды колебаний при совпадении частот внешней силы и собственных колебаний системы).

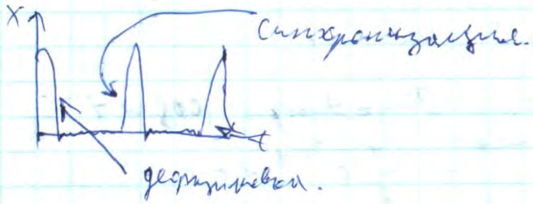
⑥ Ансамбль осцилляторов.



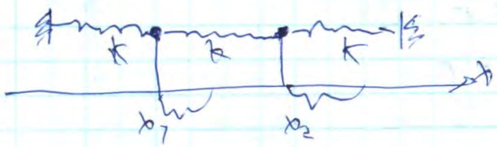
$\Delta\omega = const$

x_i – отклонение маятника с номером i,

$$x = \sum_i x_i$$



⑦. Связанные колебания.



$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1); \\ m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - kx_2; \end{cases}$$

Эти ур-я связаны, однако можно перейти к таким лин. комб. сис-м координат, для которых они станут незав.

(+) $m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2)$ (−) $m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -3k(x_2 - x_1)$

Нормальные координаты системы:

$Q_1 = x_1 + x_2$, $Q_2 = x_2 - x_1$ – это координаты, для которых ур-е движения независимы.

$$\begin{cases} \ddot{Q}_1 + \omega_1^2 Q_1 = 0; & \omega_1 = \sqrt{k/m}; \\ \ddot{Q}_2 + \omega_2^2 Q_2 = 0; & \omega_2 = \sqrt{3k/m}; \end{cases}$$ | ω_1, ω_2 – собственные частоты колебаний

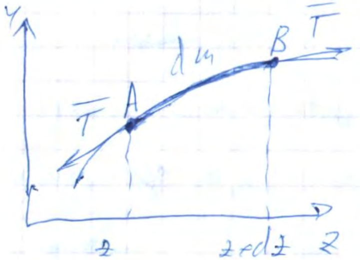
(частоты на которых меняются норм. координаты)

Норм. координаты – координаты, в кот. движения сис-мы меняются независимо.

$x_1 = \frac{Q_1 - Q_2}{2}$, $x_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{2}$; | Возможен режим колебаний, когда отличны от 0 только одна из нормальных координат.

30.11.07

Волна – колебание распространяющееся в сплошной среде.



$dm = \rho\, dz$

$\rho = \frac{m}{l}\left[\frac{кг}{м}\right]$ – линейная плотность

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dm = T\left(\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_B - \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_A\right) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz\right) T = \rho dz \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

тангенс в B, тангенс в A

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$ обозначим $\frac{T}{\rho} = v^2 \left[\frac{м^2}{с^2}\right]$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}$$ – волновое уравнение

Общее решение

$u(z,t) = F_1(t - z/v) + F_2(t + z/v)$, F_1 и F_2 – произвольные дифференцируемые ф-ции.

v – скорость волны.

$v = \sqrt{T/\rho}$.

Статистическая механика

...механика сис-м, состоящих из большого числа частиц.

Отказ от цели поиска закона движения.

Гл. цель: искать не з-н движения, а вероятности состояния системы.

$\underbrace{q(t),\ p(t)}$

закон движения $\Rightarrow$ $\underbrace{w(q,p)}_{\text{вероятность состояния}}$

§24. Случайные величины и вероятности.

Случайное событие — событие, исход которого нельзя предсказать заранее, но наблюдение которого можно многократно повторить.

Вероятность случайного события — отношение числа появлений события в серии испытаний к полному числу испытаний в пределе, где число испытаний $\to \infty$.

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{N_A}{N}.$$

$0 \le P \le 1$.

1 — достоверное событие

0 — невозможное событие.

Аксиома слож. вер: вероятн. наступления одного из взаимоисключ. событий равна сумме их вероятностей.

$$P(A \underset{\cup}{+} B) = P(A) + P(B).$$

Аксиома умнож. вер.: вероят. наст. незав. случайных событий равно произв. их. вероятностей

$$P(A \underset{\cap}{} B) = P(A)\,P(B).$$

Случайная величина — величина, значение которой нельзя предсказать заранее, но измерение которой можно многократно повторить.

Плотность вер.: отношение вероятности попадания сл. вел. в малый интервал вблизи заданного значения к величине интервала в пределе, когда интервал $\to 0$.

$$w(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{P(x_0 \le x \le x_0+\Delta x)}{\Delta x}$$

Св-ва:

1) $w \geq 0$; 2) $[w] = \frac{1}{[x]}$;

3) условие нормировки.

$$\int w(x)dx = 1.$$

Правило вычисление средних:

$f(x)$; $\overline{F(x)} = \int f(x) w(x) dx$

Среднее значение

$\overline{x} = \int x w(x) dx$ — мат. ожидание

Дисперсия — средний квадрат отклонения от

среднего.

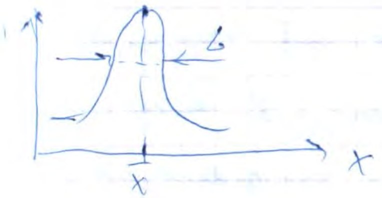
$$\sigma^2_x = \overline{(x-\overline{x})^2};$$

$$\sigma_x^2 = \int (x-\overline{x})^2 dx = \overline{x^2} - \overline{x}^2$$

Распределение Гаусса.

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\overline{x})^2/2\sigma^2},$$

$-\infty < x < +\infty$



Интегралы для справок.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad \text{(инт-л Пуассона)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \frac{1}{2a}$$

Многомерное распределение плотности вероятности

Это предел отношения вероятности попадания нескольких сл. величин в малые окрестности вблизи заданных значений к произведению величин интервалов, когда интервалы $\to 0$.

$$w(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{P(x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x,\ y_0 \leq y \leq y_0 + \Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y}.$$

$w \geq 0$, $[w] = \frac{1}{[x][y]}$;

условие нормировки: $\iint w(x,y)\, dx dy = 1.$

$f(x,y) \Rightarrow \overline{f(x,y)} = \iint f(x,y) w(x,y)\, dx dy.$

Ф-ия понижения порядка.

$$w_1(x) = \int w(x,y)\, dy$$

$$w_2(y) = \int w(x,y)\, dx$$

Для незав. сл. величин будет иметь
$w(x,y) = w_1(x)\cdot w_2(y)$.

§25. Распределение Гиббса

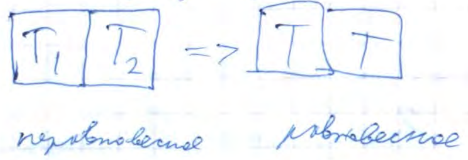
Осн. закон статистической механики равновесных сис-м.

В состоянии термодинамического равновесия расп. плотности вероятности для микр. сост. сис-мы описывается ф-ией Гиббса.

$w(z) = Ce^{-H(z)/kT}$, где w — плотность вер.; z — набор обобщ. коорд. и обобщ. импульсов.

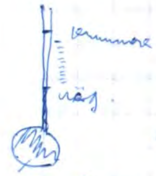
$z = q_1, \dots, q_s$; $p = p_1, \dots, p_s$;
$z = \{q, p\}$.
H — гамильтониан $= K + П$,
k — постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{Дж}{°K}$,
T — абс. температура.
$T = t + 273°$,
C — нормировочная постоянная.

Термодинамическое равновесие — сост. в к-ром сис-ма предост. самой себе может нах. сколь угодно долго.



Температура* — это то, что измеряется термометром.

Термометр.



Градус — 1/100 часть интервала между точкой t плавления льда и t° кипения воды.

Следствие расп. Гиббса:

1) распр. молекул по скоростям.

$w(v_x, v_y, v_z) = Ce^{-m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/2kT}$

— расп. Максвелла.

Температура есть мера средней кинетической энергии молекул.

2) расп. частиц во внешнем силовом поле

$w(x, y, z) = Ce^{-П(x,y,z)/kT}$

— расп. Больцмана.

x, y, z — внеш. поле.

$\Pi(x,y,z)$ — потенц. энергия.

Пример: поле сил тяжести.

$\Pi = \Pi(z) = mgz$.

$n(z) = C e^{-mgz/kT}$

Измерение постоянной Больцмана. Опыт Перре

мкм $= 10^{-6}$ м.

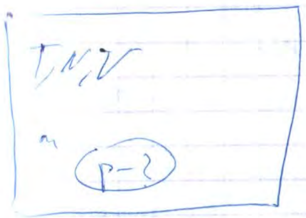
$m = \rho V, \; V = \frac{4}{3}\pi (0{,}2 \text{ мкм})^3$

$V = 4\cdot 8\cdot 10^{-24} \text{ м}^3 = 3\cdot 10^{-20} \text{ м}^3 = 3\cdot 10^{-14} \text{ см}^3$

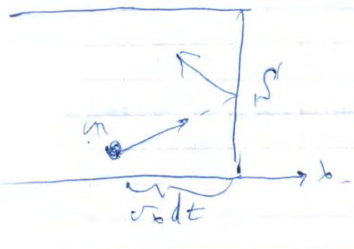
$m = \rho V, \; \rho = 0{,}2 \text{ г/см}^3;$

$m = 0{,}2 \text{ г/см}^3 \cdot 3\cdot 10^{-14} \text{ см}^3 = 0{,}6\cdot 10^{-14}$ г.

Ур-е сост. идеального газа.



$n = \frac{N}{V}$ — концентрация молекул.



$2mv_x$

Δt

$S v_x dt \cdot n(v_x)$

$n(v_x) = n\, w(v_x)\, dv_x$

$$p = \frac{2mv_x S v_x dt \; n \; w(v_x) dv_x}{S dt} = dp;$$

$dp = 2mn v_x^2 w(v_x) dv_x.$

$p = \int dp = 2mn \int_0^{\infty} v_x^2 w(v_x) dv_x.$

$w(v_x) = C e^{-mv_x^2/2kT}.$

$p = mn \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 w(v_x) dv_x = m n \overline{v_x^2} \Rightarrow \overline{v_x^2} = \frac{kT}{m};$

$\boxed{p = nkT}$ — ур-е сост. идеальн. газа.

Пример: концентрация молекул в воздухе.

$n = \frac{p}{kT}; \quad \begin{cases} p = p_0 = 10^5 \text{ Па}. \\ T = T_0 = 273 \text{ K} \end{cases}$

$n = n_0 = \frac{10^5 \text{ Па}}{1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 273 \text{ Дж}} = 2{,}7\cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ — число Лошмидта

$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_0 N}{V} = m_0 n; \quad m_0 = \frac{\rho}{n}; \quad m_0 = \frac{1{,}3 \text{ кг/м}^3}{2{,}7\cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}} =$

$= 0{,}5\cdot 10^{-25}$ кг.

$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m_0}{d^3} = \frac{г}{см^3}; \quad d = \sqrt[3]{m_0/\rho} = \sqrt[3]{\frac{0{,}5\cdot 10^{-25} \text{ кг}}{1{,}3 \text{ кг/м}^3}}$

$= 3\cdot 10^{-10}$ м (молекула воздуха)

§26. Распределение энергии по степеням свободы

Теорема о равнораспределении энергии по степеням свободы. В состоянии термодинамического равновесия на каждую квадратичную степень свободы приходится в среднем одинаковая энергия $\boxed{E = kT/2}$.

$k = 1{,}38\cdot 10^{-23}\ \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ — постоянная Больцмана,

T — абсолютная температура.

$T = t + 273$

Квадратичной степенью свободы (кв. переменной) наз-ся переменная, вклад которой в гамильтониан пропорционален квадрату этой переменной.

$H = K + \Pi = a z_1^2 + H'(z')$, где z_1 — квадратичная переменная, а H' — совок. остальных переменных гамильтониана.

$a = a(z') > 0$

Пример. Частица в потенциальном силовом поле.

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \Pi(x, y, z).$$

Вычислим среднюю энергию, приходящуюся на квадратичную степень свободы.

$$E = \langle a z_1^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} a z_1^2\, w(z)\, dz, \quad \text{где } w(z) = Ce^{-H(z)/kT}$$

среднее значение

(распр. Гиббса).

$H(z) = a z_1^2 + H'(z')$;

$$E = C\int_{-\infty}^{\infty} dz'\, e^{-H'(z')/kT} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz_1\, a z_1^2\, e^{-a z_1^2/kT}}_{I}$$

Внутр. инт-л вычислим инт. по частям.

$$a z_1^2 e^{-a z^2/kT} = -\frac{kT}{2}\, z \frac{d}{dz_1} e^{-a z^2/kT}$$

$$-\frac{kT}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dz_1\, z_1 \frac{d}{dz_1} e^{-a z^2/kT} = -\frac{kT}{2}\Big(\cancel{z_1 e^{-a z^2/kT}\Big|_{-\infty}^{\infty}}^{\,0} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a z^2/kT} dz_1\Big) = \frac{kT}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a z_1^2/kT} dz_1 = I.$$

$$E = C\int dz'\, e^{-H'(z')/kT} \int \frac{kT}{2} e^{-a z_1^2/kT} dz_1 =$$

$$= \frac{kT}{2}\int dz\, \underbrace{C e^{-H'(z')/kT - a z_1^2/kT}}_{w(z)}.$$

$\boxed{E = \frac{kT}{2}}$ нов. по степеням свободы.

$\int\limits_0^\infty w(\vartheta)\, d\vartheta = 1$

в силу условий нормировки.

Пример. Внутренняя энергия идеального газа.

$U = \langle H \rangle = \langle K \rangle + \langle \Pi \rangle$.

Идеальный газ: $\Pi = 0$.

$\langle K \rangle = N \cdot \langle K_0 \rangle$, где K_0 – кинетическая энергия одной молекулы газа.

В кинетич. энергии все переменные вх-ят квадратичными.

$\langle K_0 \rangle = \frac{kT}{2} \cdot S$, где S – число степеней свободы

$S = 3\ (He, Ne, Ar)$

$U = \frac{N kT}{2} \cdot S = \frac{3}{2} NkT$

$S = 5$ $\quad U = \frac{5}{2} NkT$

(H_2, O_2, N_2)

$S = 6\ (H_2O, CO_2, NH_3, CH_4)$

$U = 3NkT$

Теплоемкость идеального газа при постоянном объёме.

$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{1}{2} N k S$.

1 моль газа, $N = N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ 1/моль (число Авогадро)

$C_V = \frac{1}{2} N_A k S$.

$R = N_A k = 8{,}31 \frac{Дж}{моль \cdot K}$ – универсальная газовая постоянная.

$C_V = \frac{1}{2} R S$.

$\boxed{\frac{C_V}{R} = \frac{1}{2} S}$

He: $S = 3$; $\frac{C_V}{R} = \frac{3}{2}$.

O_2: $S = 5$; $\frac{C_V}{R} = \frac{5}{2}$;

H_2O: $S = 6$; $\frac{C_V}{R} = 3$;

§27. Диффузия и теплопроводность.

Диффузией наз-ся процесс проникновения одного вещ-ва в другое.

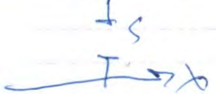
Закон диффузии: поток частиц пропорционален градиенту их концентрации

$j_x = -D \frac{\partial n}{\partial x}$, n – концентрация, D – коэф. диффузии

j_x – поток частиц.

Коэф-т диффузии. — коэф-т пропорциональности между потоком частиц и градиентом их концентрации.

Поток частиц.



$\Rightarrow J_x = \frac{\Delta N_x}{S \cdot \Delta t}$;

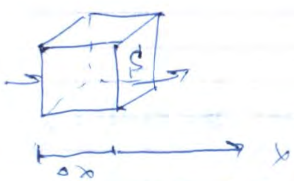
N_x — число частиц, прошедших в пол. оси x, через площадку площади S за время Δt,

$[J_x] = \frac{1}{м^2 \cdot с}$, $n = \frac{N}{V}$ $[м^{-3}]$.

$[D] = \left[\frac{J_x}{n} x\right] = \frac{1}{м^2 \cdot с} \cdot м^4 = \frac{м^2}{с}$.

Физ. смысл D — темп расплывания диффузионного пятна.

Уравнение сохранения числа частиц.



$J_x = \frac{\Delta N_x}{S \Delta t} \Rightarrow N_x = J_x S \Delta t$.

Частицы входящие: $\Delta N_x(x) = j_x(x) S \Delta t$.

Частицы выходящие $\Delta N_x(x+\Delta x) = j_x(x+\Delta x) S \Delta t$

Приращение числа частиц:

$$\Delta N = \Delta N_x(x) - \Delta N_x(x+\Delta x) = S\Delta t\,(j_x(x) - j_x(x+\Delta x)) =$$

$$= S\Delta t\left(j_x(x) - j_x(x) - \frac{\partial j_x}{\partial x}\Delta x\right)$$ Тейлор

$$\Delta N = -S\Delta t\,\frac{\partial j_x}{\partial x}\Delta x.$$

Объем кубика $\Delta V = S\Delta x$.

Приращение концентрации:

$$\Delta n = \frac{\Delta N}{\Delta V} = -\frac{\partial j_x}{\partial x}\Delta t.$$

$\Delta t \to 0$

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial j_x}{\partial x}} \leftarrow j_x = -D\frac{\partial n}{\partial x};$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$ — ур-е диффузии

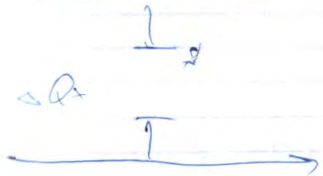
(как подкрашивание в воде)

Теплопроводность — процесс распространения тепла ~~X~~ неоднородно нагретыми телами.

Закон теплопроводности. Поток тепла пропорционален градиенту температуры.

$$J_x = -\varkappa \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \varkappa \text{ — коэф-т теплопроводности.}$$

Поток тепла



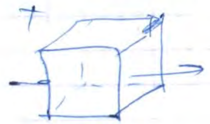
$J_x = \frac{\Delta Q_x}{S \Delta t}$, ΔQ_x — энергия, которая проходит в направлении x через площадку пл-ди S за время Δt.

$[Q] = Дж \Rightarrow [J_x] = \frac{Дж}{м^2 с}$.

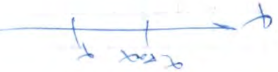
$[\varkappa] = \left|\frac{J \cdot x}{T}\right| = \frac{Дж}{м^2 с} \cdot \frac{м}{К} = \frac{Дж}{м \cdot с \cdot К}$.

Ур-е сохранения энергии.

Теплопроводность — св-во, коэф-т пропорциональности потока тепла и градиента температуры.



$\Delta Q_x = J_x S \Delta t$



Эн. входящая:

$\Delta Q_x(x) = J_x(x) S \Delta t$

Эн. выход.:

$\Delta Q_x(x+\Delta x) = J_x(x+\Delta x) S \Delta t$.

Превращение энергии:

$$\Delta Q = \Delta Q_x(x) - \Delta Q_x(x+\Delta x) = S\Delta t\,[J_x(x) - J_x(x+\Delta x)]$$

$$= S\Delta t\,[\cancel{J_x(x)} - \cancel{J_x(x)} - \frac{\partial J_x}{\partial x}\Delta x)] = -S\Delta t \frac{\partial J_x}{\partial x}\Delta x$$

$$\Delta Q = -S\Delta t \frac{\partial j_x}{\partial x}\Delta x$$

$$\Delta Q = c\Delta m \Delta T$$

$$c\Delta m \Delta T = -S\Delta t \frac{\partial j_x}{\partial x}\Delta x$$

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho S \Delta x$$

$$c\rho \Delta T = -\Delta t \frac{\partial j_x}{\partial x}$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = -\frac{1}{c\rho}\frac{\partial J_x}{\partial x}, \quad \Delta t \to 0$$

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{c\rho}\frac{\partial J_x}{\partial x}} \quad J_x = -\varkappa \frac{\partial T}{\partial x}.$$

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\varkappa}{c\rho}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \text{ — ур-е теплопроводности,}$$

где T — температура, t — время, x — координата, $\varkappa$ — коэф-т теплопроводности, c — удельная теплоемкость, ρ — плотность.

$\frac{\varkappa}{c\rho} = \chi$ — коэф-т температуропроводности.

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \qquad [\varkappa] = \frac{м^2}{с}$$

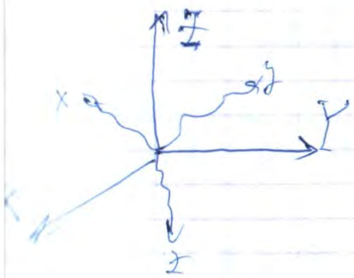
§28. Тензор инерции твердого тела. Главные оси инерции.

Теорема моментов $\dot{\vec{N}} = \vec{M}$.

своб. вращение.

$\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{N} = const$

Как видно из опыта, в процессе полёта тело меняет свою ориентацию в пр-ве, а это значит, что будут меняться проекции момента импульса на оси координат, связанные с телом.



X, Y, Z — лабораторная с-ма координат, а x, y, z — с-ма координат, связанная с телом.

$N_x = N_x(t), \quad N_y = N_y(t), \quad N_z = N_z(t)$.

Момент инерции тела.

$\vec{N} = \sum_i \vec{N}_i, \quad \vec{N}_i = [\vec{r}_i, m_i\vec{v}_i]$

§3 $\to$ $\vec{v}_i = [\vec{\omega}, \vec{r}_i]$

$\vec{N}_i = m_i[\vec{r}_i, [\vec{\omega}, \vec{r}_i]] = m_i\{\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i(\vec{r}_i, \vec{\omega})\}$

Спроектируем это векторное равенство на оси координат, связанные с телом.

$$\begin{cases} r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 \\ (\vec{r}_i, \vec{\omega}) = x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z. \end{cases}$$

$N_{ix} = m_i\{\omega_x(x_i^2+y_i^2+z_i^2) - x_i(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z)\}$

$$\begin{cases} N_{ix} = m_i\{(y_i^2+z_i^2)\omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z\} \\ N_{iy} = m_i\{-y_i x_i \omega_x + (z_i^2+x_i^2)\omega_y - y_i z_i \omega_z\} \\ N_{iz} = m_i\{-z_i x_i \omega_x - z_i y_i \omega_y + (x_i^2+y_i^2)\omega_z\} \end{cases}$$

Просуммируем эти ур-я для всех точек тела.

$N_x = J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z$.

$N_y = J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z$.

$N_z = J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z$.

где $J_{xx} = \sum_i m_i(y_i^2+z_i^2)$ — момент инерции тела отн. оси

$$\begin{cases} J_{yy} = \sum_i m_i(z_i^2 + x_i^2) & \text{— м. инерц. отн. оси } Oy. \\ J_{zz} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) & \text{— отн. оси } Oz. \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i = J_{yx} \\ J_{xz} = -\sum_i m_i x_i z_i = J_{zx} \\ J_{yz} = -\sum_i m_i y_i z_i = J_{zy} \end{cases}$$

<u>Тензор инерции твердого тела</u> — это матрица, связывающая компоненты момента импульса с компонентами угловой скорости вращения тела.

Из такой связи компонент векторов следует, что они не параллельны друг другу ($\vec{N} \nparallel \vec{\omega}$).

В общем случае можно так выбрать оси Ox, Oy, Oz, что тензор инерции станет диагональным.

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}.$$

Такие оси x, y, z наз-ся главными осями инерции.

$$\begin{cases} N_x = J_x \omega_x \\ N_y = J_y \omega_y \\ N_z = J_z \omega_z \end{cases}$$

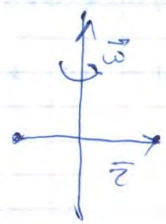
Чем физически выделены главные оси?

Положим, что мы вращаем тело вокруг одной из гл. осей.

$\omega_x \neq 0,\ \omega_y = 0,\ \omega_z = 0. \Rightarrow \vec{N} \parallel \vec{\omega}.$

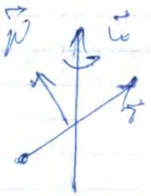
$N_x \neq 0,\ N_y = N_z = 0.$

Если тело вращ. вокруг одной из главных осей, то векторы $\vec{N}$ и $\vec{\omega}$ становятся $\parallel$ друг другу.



$\vec{N} = \sum [\vec{r}_i, m\dot{\vec{r}}_i]$

главная ось



не главная ось

$\forall$ ось симметрии тела — это главная ось.

Кинетическая энергия вращающегося тела

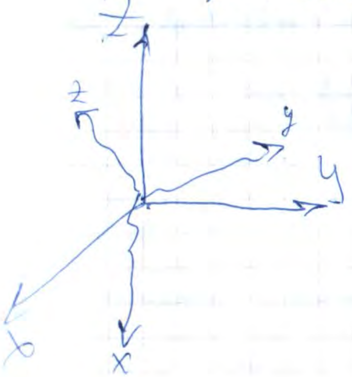
$$K = \sum_i K_i = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec v_i \vec v_i =$$

$$\frac{1}{2}\sum_i m_i \vec v_i [\vec\omega, \vec r_i] = \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec\omega [\vec r_i, \vec v_i] = \frac{1}{2}\vec\omega \vec N =$$

$$= \frac{1}{2}(\omega_x N_x + \omega_y N_y + \omega_z N_z) = \boxed{\frac{1}{2}(J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2) = K}$$

§29. Динамика твердого тела.

Уравнения Эйлера.



XYZ — лабораторная с-ма

xyz — с-ма тела

$$\begin{cases} N_x = J_x\omega_x \\ N_y = J_y\omega_y \\ N_z = J_z\omega_z \end{cases}$$

J_x, J_y, J_z — главные моменты инерции.

$\dot{\vec N} = \vec M$ — теорема моментов

Спроектируем это векторное равенство на главные оси инерции тела.

$\dot{\vec N} = \frac{d\vec N}{dt}$, где $d\vec N$ — приращ. отн. лаб. с-мы.

Обозначим через $d'\vec N$ — приращ. $\vec N$ отн. с-мы

$d\vec N \ne d'\vec N$.

$$d\vec N = d'\vec N + [\vec\omega, \vec N]\,dt.$$

$$\left(\vec v_i = [\vec\omega_i, \vec r_i],\quad d\vec r_i = [\vec\omega_i, \vec r_i]\,dt\right).$$

$$\frac{d'\vec N}{dt} + [\vec\omega, \vec N] = \dot{\vec N}.$$

$$[\vec\omega, \vec N] = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ N_x & N_y & N_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ J_x\omega_x & J_y\omega_y & J_z\omega_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec i (J_z - J_y)\omega_y\omega_z + \vec j (J_x - J_z)\omega_x\omega_z + \vec k (J_y - J_x)\omega_x\omega_y.$$

$$\begin{cases} J_x \dfrac{d'\omega_x}{dt} + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z = M_x \\ J_y \dfrac{d'\omega_y}{dt} + (J_x - J_z)\omega_x\omega_z = M_y \\ J_z \dfrac{d'\omega_z}{dt} + (J_y - J_x)\omega_x\omega_y = M_z \end{cases}$$

ур-е Эйлера.

Из решения этих ур-ий можем найти $\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)$ – проекции мгновенной угловой скорости на главные оси инерции тела.

$K_x(t) = J_x\omega_x(t),\ K_y(t) = J_y\omega_y(t),\ K_z(t) = J_z\omega_z(t)$.

Пример: свободное вращение симметричного волчка.

$\vec{M} = 0$.

Симметр. волчок – тело, у кот. совпадают 2 из 3 главных моментов инерции

$J_x = J_y \neq J_z$

Обозначим $J_x = J_y = J_A$; $J_z = J_B$

$\omega_z(t) = \omega_{z0} = const$,

$$\begin{cases} J_A\dot\omega_x + (J_B - J_A)\omega_y\omega_{z0} = 0; \\ J_A\dot\omega_y - (J_B - J_A)\omega_x\omega_{z0} = 0; \end{cases}$$

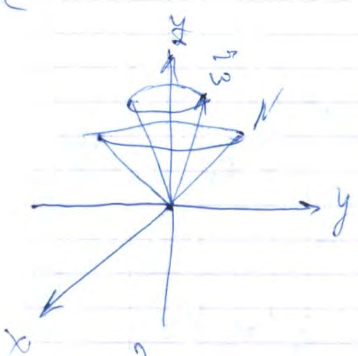
Обозначим, $\Omega = \frac{J_B - J_A}{J_A}\omega_{z0}$

$$\begin{cases} \dot\omega_x + \Omega\omega_y = 0; \\ \dot\omega_y - \Omega\omega_x = 0; \end{cases}$$

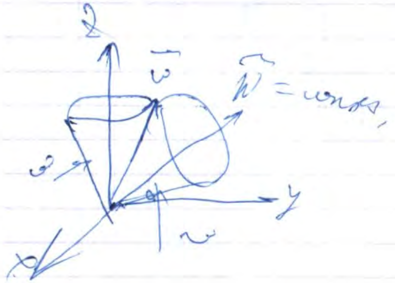
$\ddot\omega_x + \Omega\dot\omega_y = \ddot\omega_x + \Omega^2\omega_x = 0.$

$$\begin{cases} \omega_x(t) = \omega_0\cos(\Omega t + \varphi) \\ \omega_y(t) = \omega_0\sin(\Omega t + \varphi) \\ \omega_z(t) = \omega_{z0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_x = K_0\cos(\Omega t + \varphi), \quad K_0 = J_A\omega_0 \\ K_y = K_0\sin(\Omega t + \varphi) \\ K_z = K_{z0} = const; \end{cases}$$



отн. осей связанных с телом.



Будем считать что 2-ой конус катится без проск. по неподв. I.

Свободный сим. волчок движ. так, как если бы он был вмонтирован в конус, котор...

Ведь пресколизывать по кв-ти другого выпуска.

Матрица поворота.

$S_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j$ $\quad \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – лабор. единич.

$\dot{S}_{ij}(t) - ?$ $\quad \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$ – тела.

$\dot{S}_{ij} = \vec{e}_i \dot{\vec{e}}_j{}'$

$\dot{\vec{e}}_j{}' = [\vec{\omega}, \vec{e}_j{}']$

Пример: $\dot{S}_{11} - ?$

$$\dot{\vec{e}}_1{}' = [\vec{\omega}, \vec{e}_1{}'] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1{}' & \vec{e}_2{}' & \vec{e}_3{}' \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_2{}'\omega_z - \vec{e}_3{}'\omega_y - \dot{\vec{e}}_1{}'$$

$$\dot{S}_{11} = \vec{e}_1 \dot{\vec{e}}_1 = e_1(\vec{e}_2{}'\omega_z - \vec{e}_3{}'\omega_y) =$$

$$= \boxed{\omega_z S_{12} - \omega_y S_{13} = \dot{S}_{11}}.$$